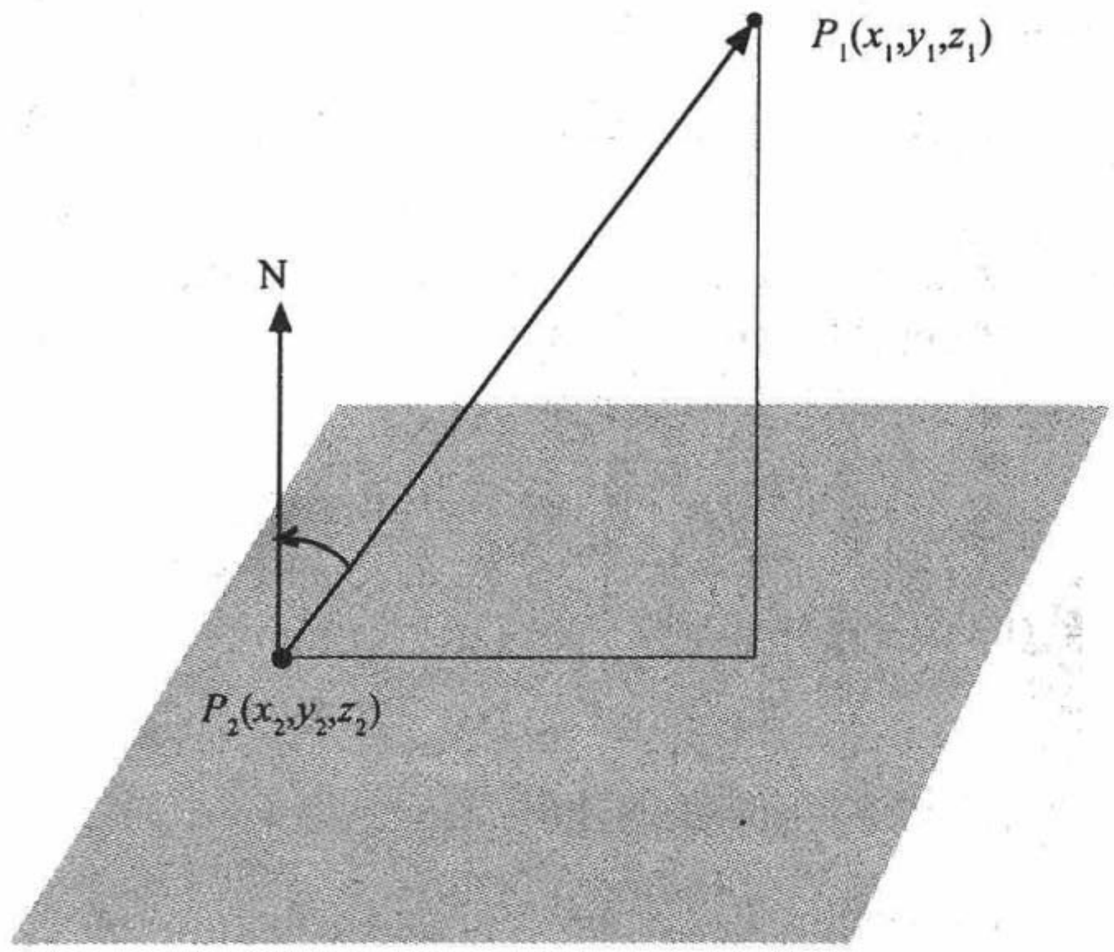


Figura 10.22

$$= \frac{\pm[A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) + C(z_1 - z_2)]}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{\pm(Ax_1 + By_1 + Cz_1 - Ax_2 - By_2 - Cz_2)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Como P_2 está sobre el plano $-Ax_2 - By_2 - Cz_2 = D$. Ahora, para eliminar la ambigüedad del signo se toma el valor absoluto del numerador y se tiene

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

El lector debe observar que la fórmula (10.14) para la distancia de un punto a un plano es una generalización directa de la ecuación (2.19) para la distancia de un punto en un plano a una recta.

Así mismo, la ecuación (1.1) para la distancia entre dos puntos en una recta,

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2},$$

se generaliza a la ecuación, (1.2)

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

para la distancia entre puntos en un plano, y a la ecuación (9.1),

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

para la distancia entre puntos en el espacio. En cursos de matemáticas superiores, la fórmula se extiende para describir la distancia entre cuartetas ordenadas

$$(x_1, y_1, z_1, w_1) \qquad \text{y} \qquad (x_2, y_2, z_2, w_2)$$

o entre n-adas ordenadas, donde n es cualquier entero positivo.

Ejemplo 4 Encuentre la distancia del plano $2x + 3y - 6z - 2 = 0$ al punto $(4, -6, 1)$.

Solución Sustituyendo los valores adecuados para A, B, C, D, x_1, y_1, z_1 en la ecuación (10.14), se obtiene

$$\begin{aligned} d &= \frac{|2(4) + 3(-6) + (-6)(1) - 2|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} \\ &= \frac{|8 - 18 - 6 - 2|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} \\ &= \frac{18}{7}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicios

Escriba la ecuación del plano que satisface las condiciones dadas en los ejercicios 1 a 8.

1. Es perpendicular a $\mathbf{N} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y pasa por el punto $(1, 1, 2)$.
2. Es perpendicular a $\mathbf{N} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y pasa por el origen.
3. Es paralelo al plano $2x - 3y - 4z = 5$ y pasa por $(1, 2, -3)$.
4. Es perpendicular al segmento de recta que une $(4, 0, 6)$ y $(0, -8, 2)$, y pasa por el punto medio del segmento.
5. Pasa por el origen y es perpendicular a la recta que pasa por $(2, -3, 4)$ y $(5, 6, 0)$.
6. Pasa por los puntos $(0, 1, 2)$, $(2, 0, 3)$, $(4, 3, 0)$.
7. Pasa por los puntos $(2, -2, -1)$, $(-3, 4, 1)$, $(4, 2, 3)$.
8. Pasa por $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$.

En los ejercicios 9 a 12 encuentre el coseno del ángulo agudo entre cada par de planos.

9. $2x + y + z + 3 = 0, \quad 2x - 2y + z - 7 = 0$
10. $2x + y + 2z - 5 = 0, \quad 2x - 3y + 6z + 5 = 0$
11. $3x - 2y + z - 9 = 0, \quad x - 3y - 9z + 4 = 0$
12. $x - 8y + 4z - 3 = 0, \quad 4x + 2y - 4z + 3 = 0$
13. Muestre que los planos

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{y} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

son perpendiculares si, y sólo si,

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

14. Determine el valor de C de modo que los planos $2x - 6y + Cz = 5$ y $x - 3y + 2z = 4$ sean perpendiculares.

En los ejercicios 15 a 18 encuentre la distancia del plano dado al punto dado.

15. $2x - y + 2z + 3 = 0$, $(0, 1, 3)$
16. $6x + 2y - 3z + 2 = 0$, $(2, -4, 3)$
17. $4x - 2y + z - 2 = 0$, $(-1, 1, 2)$
18. $3x - 4y - 5z = 0$, $(5, -1, 3)$
19. Encuentre la ecuación de la esfera con centro en $(1, 1, 7)$ y tangente al plano $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

10.5 ECUACIÓN VECTORIAL DE UNA RECTA

Sea L una recta que pasa por un punto dado $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y es paralela a un vector distinto de cero dado

$$\mathbf{V} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}.$$

Si $P(x, y, z)$ es un punto sobre la recta, entonces el vector $\overrightarrow{P_1P}$ es paralelo a $\mathbf{V}$ (Fig. 10.23). Recíprocamente, si $\overrightarrow{P_1P}$ es paralelo a $\mathbf{V}$, el punto P está sobre la recta L. Por tanto, P está sobre L si, y sólo si, existe un escalar t tal que

$$\overrightarrow{P_1P} = t\mathbf{V}$$

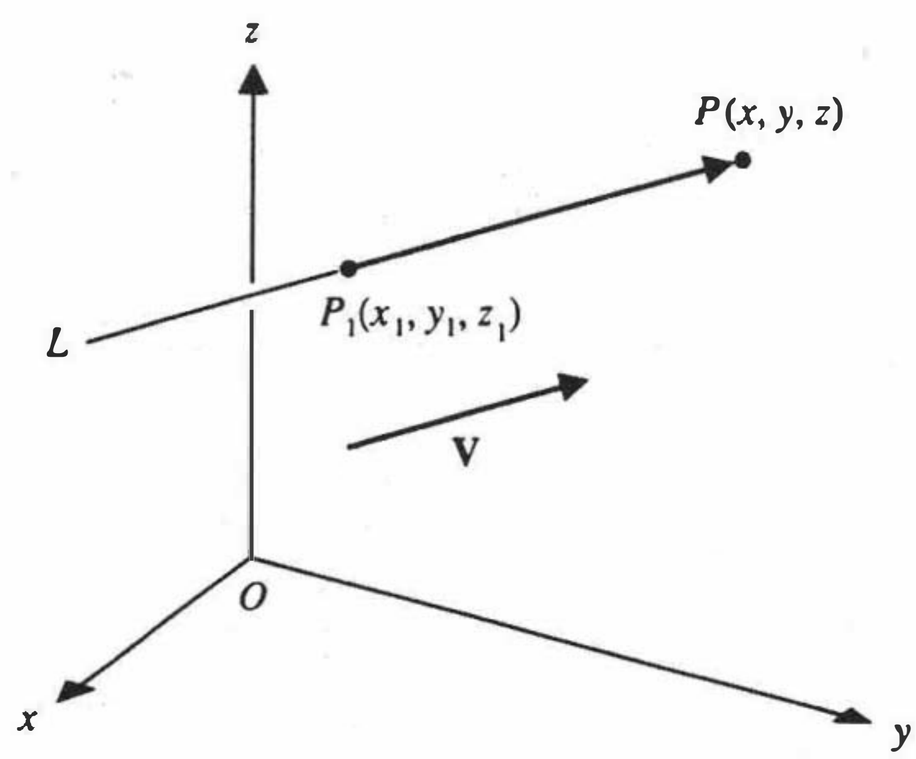


Figura 10.23

o bien

$$(x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j} + (z - z_1)\mathbf{k} = At\mathbf{i} + Bt\mathbf{j} + Ct\mathbf{k}. \qquad \textbf{(10.15)}$$

Igualando los coeficientes correspondientes de **i**, **j** y **k** se obtienen las ecuaciones

$$x - x_1 = At, \qquad y - y_1 = Bt, \qquad z - z_1 = Ct,$$

o, trasponiendo,

$$x = x_1 + At, \qquad y = y_1 + Bt, \qquad z = z_1 + Ct. \tag{10.16}$$

Cuando se da a t cualquier valor real, las ecuaciones (10.16) determinan las coordenadas (x, y, z) de un punto sobre la recta L. Además, hay un valor de t que corresponde a cualquier punto de la recta. Las ecuaciones (10.16) se llaman **ecuaciones paramétricas** de la recta.

Despejando t en cada ecuación paramétrica e igualando valores iguales, se obtiene

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}, \qquad \text{si } ABC \neq 0. \tag{10.17}$$

Éstas se llaman **ecuaciones simétricas** de la recta.

Los planos que contienen una recta y son perpendiculares a los planos coordenados se llaman **planos proyectantes**.

Las ecuaciones (10.17) representan tres planos proyectantes. Esto se hace evidente cuando las ecuaciones se escriben como

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B}, \qquad \frac{x - x_1}{A} = \frac{z - z_1}{C}, \qquad \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}.$$

Estas ecuaciones, cada una en dos variables, representan planos perpendiculares, respectivamente, a los planos xy, xz y yz. Estas ecuaciones representan una recta y, por ende, la recta es la intersección de los planos. Por supuesto, cualesquiera dos de las ecuaciones determinan la recta. Se observa además que cualquiera de las ecuaciones se puede obtener de las otras dos.

Una recta en el espacio puede definirse mediante dos planos que pasen por la recta. Por ello, hay infinidad de maneras de definir una recta, pues hay infinidad de planos que pasan por una recta. Sin embargo, suele ser conveniente tratar con los planos proyectantes. Si una recta es paralela a un plano coordenado, una de las cantidades A, B y C en las ecuaciones (10.17) es igual a cero y reciprocamente. En este caso, un miembro de la ecuación tendría cero en el denominador y no podría usarse. Si, por ejemplo, $A = 0$ y B y C no fueran cero, entonces la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ es paralela al vector $\mathbf{V} = B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$. Por tanto, la recta es paralela al plano yz y, en consecuencia, el plano $x = x_1$ contiene a la recta. Si de A, B y C dos son cero, por ejemplo $A = B = 0$, entonces la recta es paralela al eje z. Así la recta es la intersección de los planos $x = x_1$ y $y = y_1$. Se observa entonces que cuando el denominador de un miembro de las ecuaciones (10.17) es cero, el numerador correspondiente, igualado a cero, representa un plano que pasa por la recta en cuestión.

Ejemplo 1 Encuentre ecuaciones simétricas que representen una recta que pase por el punto $(2, -1, 3)$ y sea paralela al vector $\mathbf{V} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. Encuentre, además, un conjunto de ecuaciones paramétricas que representen la recta.

Solución Los coeficientes de **i**, **j** y **k** del vector dado son los denominadores en la fórmula (10.17) y x_1, y_1 y z_1 deben reemplazarse, respectivamente, por 2, –1 y 3. Así, se tiene

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{6}.$$

Las ecuaciones paramétricas, obtenidas al igualar cada uno de los miembros de estas ecuaciones a un escalar t y despejando x, y y z, son

$$x = 2 + 2t, \qquad y = -1 - 5t, \qquad z = 3 + 6t.$$

El escalar t es un parámetro al cual puede asignarse cualquier valor real. Aquí se pasó de las ecuaciones simétricas a las ecuaciones paramétricas. Claro que, de manera recíproca, las ecuaciones simétricas se pueden encontrar a partir de las ecuaciones paramétricas.

Ejemplo 2 Una recta pasa por los puntos $P_1(2, -4, 5)$ y $P_2(-1, 3, 1)$. Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta.

Solución El vector de P_1 a P_2 es paralelo a la recta. Por tanto, se tiene

$$\overrightarrow{P_1P_2} = -3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k},$$

y, en consecuencia, las ecuaciones

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-5}{-4}. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 3 Escriba las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $P_1(2, 6, 4)$ y $P_2(3, -2, 4)$.

Solución El vector de P_1 a P_2 es

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{i} - 8\mathbf{j}.$$

Por tanto, la recta que se busca es paralela al plano xy. El plano $z = 4$ contiene a la recta. Este plano es perpendicular a dos de los planos coordenados. Se usan los dos primeros miembros de las ecuaciones (10.17) para obtener otro plano que contenga a la recta. Se tienen, entonces, ecuaciones que definen

$$z = 4, \qquad \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-8},$$

o bien

$$z = 4, \qquad 8x + y - 22 = 0.$$

Observe que no se pudo usar el tercer miembro de las ecuaciones simétricas, porque su denominador sería cero. Sin embargo, el numerador de ese miembro se igualó a cero para obtener uno de los planos. ■

Ejemplo 4 Encuentre ecuaciones, en forma simétrica, de la recta de intersección de los planos

$$x + y - z - 7 = 0 \qquad \text{y} \qquad x + 5y + 5z + 5 = 0.$$

Solución La primera ecuación se multiplica por 5 y se suma a la segunda ecuación para eliminar z. De la segunda ecuación se resta la primera para eliminar x. Esto da las ecuaciones

$$6x + 10y - 30 = 0 \quad \text{y} \quad 4y + 6z + 12 = 0.$$

Despejando y en cada una, se encuentra

$$y = \frac{-3x + 15}{5} \quad \text{y} \quad y = \frac{-3z - 6}{2}.$$

Por tanto,

$$\frac{-3x + 15}{5} = y = \frac{-3z - 6}{2}.$$

Estas ecuaciones simétricas se pueden convertir a una forma más sencilla si cada miembro se divide entre –3. Esto da

$$\frac{x - 5}{5} = \frac{y}{-3} = \frac{z + 2}{2}.$$

Las ecuaciones simétricas también se pueden escribir, encontrando primero las coordenadas de dos puntos sobre la recta definida por las ecuaciones dadas. Cuando $y = 0$ las ecuaciones se vuelven $x - z - 7 = 0$ y $x + 5z + 5 = 0$. La solución de estas ecuaciones es $x = 5$, $z = -2$. Por ello, el punto $P_1(5, 0, -2)$ se ubica sobre la recta de intersección de los planos dados. De manera análoga, se encuentra que $P_2(0, 3, -4)$ está sobre la recta. Entonces, el vector

$$\overline{P_2P_1} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

es paralelo a la recta cuyas ecuaciones se buscan. En consecuencia se obtienen, como antes, las ecuaciones simétricas

$$\frac{x - 5}{5} = \frac{y}{-3} = \frac{z + 2}{2}. \quad \blacksquare$$

Ángulos directores, cosenos directores y números directores

Se usó el vector $\mathbf{V} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ para deducir las ecuaciones paramétricas de una recta. Las cantidades A, B y C, como se señala ahora, tienen una importancia geométrica con respecto a la recta.

DEFINICIÓN 10.7

Los ángulos α, β y γ que una recta dirigida forma con los ejes positivos x, y y z se llaman **ángulos directores**. Los cosenos de los ángulos directores se llaman **cosenos directores**.

Los cosenos directores de una recta representada por ecuaciones de la forma (10.16) o (10.17) se pueden encontrar mediante el uso de vectores. El vector

$$\mathbf{V} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$$

es paralelo a la recta. Por consiguiente, es posible escoger la dirección positiva de la recta como **V** o –**V**. Si se escoge **V** como dirección positiva, se toma el producto escalar de **V** y cada uno de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**. Se observa que el ángulo formado por dos vectores que no se intersecan se define como igual al ángulo formado por dos vectores que sí se intersecan y son paralelos a los vectores dados y con la misma dirección.

Si se denomina d a la longitud de **V**, por la definición de producto escalar se tiene

$$(A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = |A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}||\mathbf{i}| \cos \alpha,$$
$$A = d \cos \alpha.$$

De manera análoga, $B = d \cos \beta$ y $C = d \cos \gamma$. Por tanto,

$$\cos \alpha = \frac{A}{d}, \qquad \cos \beta = \frac{B}{d}, \qquad \cos \gamma = \frac{C}{d}.$$

Las cantidades A, B y C se llaman **números directores**. Además, los productos de los cosenos directores por cualquier número positivo también se llaman números directores.

Teorema 10.10

La suma de los cuadrados de los cosenos directores de una recta es igual a 1. Esto es,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Se deja al estudiante la demostración de este teorema.

Ejemplo 5 Los números 4, 1 y 8 son números directores de una recta. Encuentre los cosenos directores de la recta.

Solución Para obtener los cosenos directores, cada número director se divide entre $\sqrt{4^2 + 1^2 + 8^2} = 9$. Esto da

$$\cos \alpha = \frac{4}{9}, \qquad \cos \beta = \frac{1}{9}, \qquad \cos \gamma = \frac{8}{9}. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 6 Una recta forma un ángulo de $\pi/3$ con el eje x positivo y de $\pi/4$ con el eje y positivo. ¿Qué ángulo forma la recta con el eje z positivo?

Solución Usando el teorema 10.10, se tiene

$$\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\gamma = 1,$$
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \cos^2\gamma = 1.$$

Entonces $\cos^2\gamma = 1/4$ y, por tanto, $\cos\gamma = 1/2$ o $\cos\gamma = -1/2$. De este modo, $\gamma = \pi/3$ ó $2\pi/3$. ■

Los ángulos directores de una recta dada dependen de la dirección positiva de la recta que se haya escogido. Sean α_1, β_1 y γ_1 los ángulos para una dirección y α_2, β_2 y γ_2 los ángulos para la dirección opuesta. Entonces

$$\alpha_2 = \pi - \alpha_1, \quad \beta_2 = \pi - \beta_1, \quad \gamma_2 = \pi - \gamma_1$$

Las ecuaciones producen

$$\cos\alpha_2 = -\cos\alpha_1, \qquad \cos\beta_2 = -\cos\beta_1, \qquad \cos\gamma_2 = -\cos\gamma_1.$$

De modo que hay dos conjuntos posibles de cosenos directores para una recta, donde un conjunto es el negativo del otro.

Ejemplo 7 Una recta pasa por $P_1(-4, 9, 5)$ y $P_2(2, 12, 3)$. Encuentre los cosenos directores si la recta va dirigida de P_1 a P_2.

Solución El vector de P_1 a P_2 es

$$\overrightarrow{P_1P_2} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Por tanto, 6, 3 y –2 es un conjunto de números directores. Como $\sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = 7$ se tiene

$$\cos\alpha = \frac{6}{7}, \qquad \cos\beta = \frac{3}{7}, \qquad \cos\gamma = -\frac{2}{7}. \quad ■$$

Ejemplo 8 Asígnese una dirección positiva para la recta representada por las ecuaciones

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-5}{-2}$$

y encuentre los cosenos directores.

Solución Se puede escoger 4, –3, –2 como un conjunto de números directores, o el conjunto –4, 3, 2. Al escoger el segundo conjunto y notar que $\sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ se tiene

$$\cos\alpha = \frac{-4}{\sqrt{29}}, \qquad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{29}}, \qquad \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{29}}. \quad ■$$

Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, encuentre ecuaciones simétricas y ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P y es paralela al vector dado.

1. $P(4, -3, 5)$; $-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
2. $P(0, 1\ -2)$; $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
3. $P(1, 1, 2)$; $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
4. $P(-2, -2, 3)$; $5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$

5. $P(2, -1, 1)$; $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$
6. $P(3, 3, 3)$; $\mathbf{i} + \mathbf{j}$
7. $P(0, 0, 0)$; $\mathbf{j}$
8. $P(0, 0, 0)$; $\mathbf{k}$

En los ejercicios 9 a 16 escriba ecuaciones simétricas para la recta que pasa por P_1 y P_2.

9. $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(-2, 4, 0)$
10. $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(3, 4, 5)$
11. $P_1(1, 0, 2)$, $P_2(0, 2, 1)$
12. $P_1(2, 4, 0)$, $P_2(1, 2, 8)$
13. $P_1(2, 5, 4)$, $P_2(2, 4, 3)$
14. $P_1(0, 4, 3)$, $P_2(0, 4, 4)$
15. $P_1(1, 3, 4)$, $P_2(3, 3, 4)$
16. $P_1(0, 0, 2)$, $P_2(0, 0, 4)$

En los ejercicios 17 a 20 encuentre una forma simétrica para cada par de ecuaciones.

17. $x - y - 2z + 1 = 0$,
$x - 3y - 3z + 7 = 0$
18. $x + y - 2z + 8 = 0$,
$2x - y - 2z + 4 = 0$
19. $x + y + z - 9 = 0$,
$2x + y - z + 3 = 0$
20. $x + y - z + 8 = 0$,
$2x - y + 2z + 6 = 0$

21. Una recta forma un ángulo de 45° con el eje x positivo y de 60° con el eje z positivo. ¿Qué ángulo forma con el eje y positivo?
22. Una recta forma un ángulo de 135° con el eje x positivo y de 60° con el eje y positivo. ¿Qué ángulo forma con el eje z positivo?

En los ejercicios 23 a 28 una recta pasa por P_1 y P_2. Encuentre los cosenos directores si la recta va dirigida de P_1 a P_2.

23. $P_1(-3, 4, -2)$, $P_2(1, 5, 6)$
24. $P_1(1, -1, 4)$, $P_2(3, 1, 5)$
25. $P_1(-5, 1, 8)$, $P_2(5, 3, -3)$
26. $P_1(3, 1, -6)$, $P_2(0, 5, 6)$
27. $P_1(3, 2, 1)$, $P_2(4, 5, 6)$
28. $P_1(2, -3, 4)$, $P_2(5, -6, 7)$
29. Los números 4, 1, 8 y 2, 2, 1 son números directores de dos rectas. Encuentre el coseno del ángulo agudo θ entre las rectas.
30. Los números 3, 4, 12 y 6, 3, 2 son números directores de dos rectas. Encuentre el coseno del ángulo agudo θ entre las rectas.

En los ejercicios 31 a 34 igualando x, y y z, una por una, a cero, encuentre las coordenadas de los puntos donde la recta corta los planos coordenados.

31. $\dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+3}{3}$
32. $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{1}$
33. $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-4}{2}$
34. $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$

10.6 EL PRODUCTO VECTORIAL

Se presenta ahora otro tipo de producto de dos vectores. Sean **A** y **B** dos vectores no paralelos y distintos de cero que forman un ángulo θ, donde $0 < \theta < \pi$ (Fig. 10.24). El **producto vectorial** o **producto cruz**, cuya denotación es $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ se define mediante los siguientes enunciados:

1. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es un vector perpendicular al plano determinado por **A** y **B**.
2. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ apunta en la dirección en la que un tornillo de rosca derecha avanzaría al girar su cabeza de **A** (primer vector) a **B** por el ángulo θ.
3. $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \operatorname{sen} \theta$.

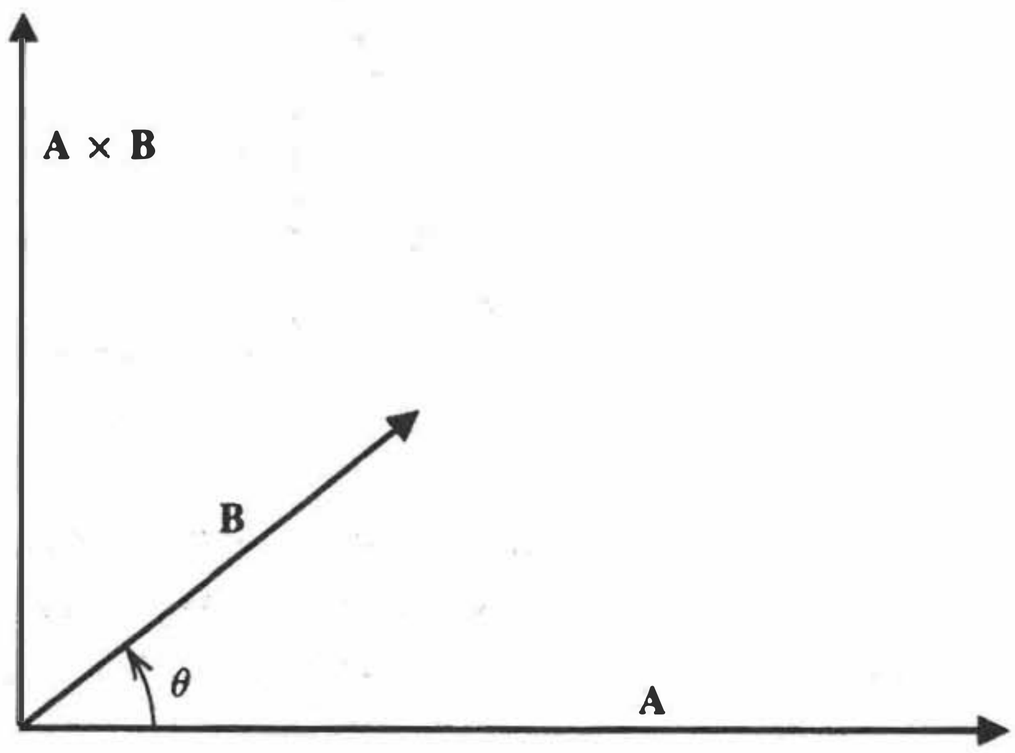


Figura 10.24

Si **A** y **B** son paralelos ($\theta = 0$ o $\theta = \pi$), el producto vectorial está definido por el enunciado 3. Esto hace que el producto sea igual a cero, pues $\operatorname{sen}\theta = 0$. El producto vectorial es cero si **A** o **B**, o ambos, son iguales a cero.

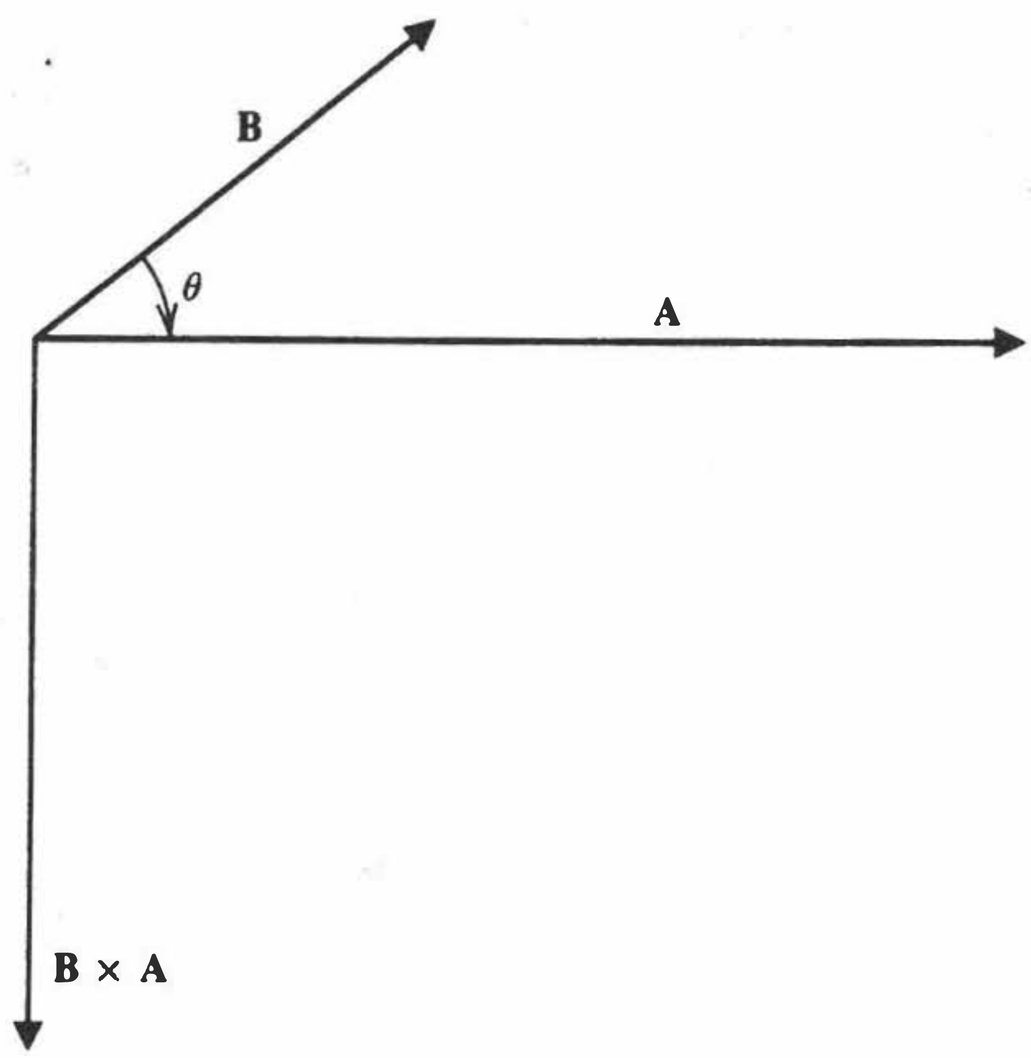


Figura 10.25

A partir del enunciado 2 se observa que el intercambio de los factores en la multiplicación vectorial invierte la dirección del producto (Fig. 10.25).
Por tanto,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A},$$

y la multiplicación de este tipo no es conmutativa.

La magnitud del producto cruz tiene una interpretación geométrica simple. El área del paralelogramo en la figura 10.26 es $|\mathbf{A}|h$.

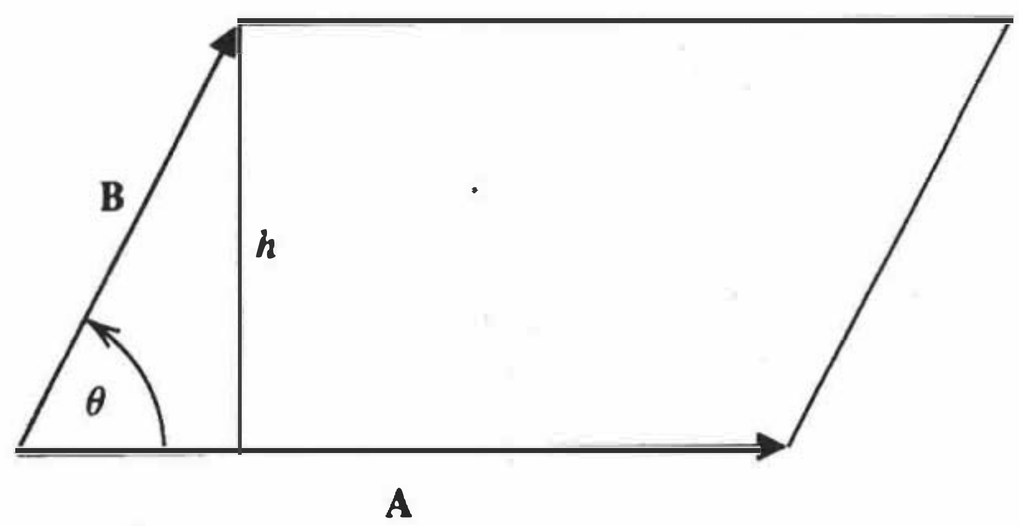


Figura 10.26

Por consiguiente, el área del paralelogramo del cual dos lados adyacentes son vectores es igual al valor absoluto del producto vectorial de los vectores. La mitad del valor absoluto del producto vectorial es, por supuesto, igual al área del triángulo determinado por los vectores.

Se puede mostrar que esta multiplicación vectorial es distributiva. (Véase el Ejer. 34 al final de esta sección). La propiedad distributiva se expresa mediante la ecuación

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{C}).$$

Suponga que la definición de multiplicación vectorial se aplica a los vectores unitarios **i**, **j** y **k** (Fig. 10.27).

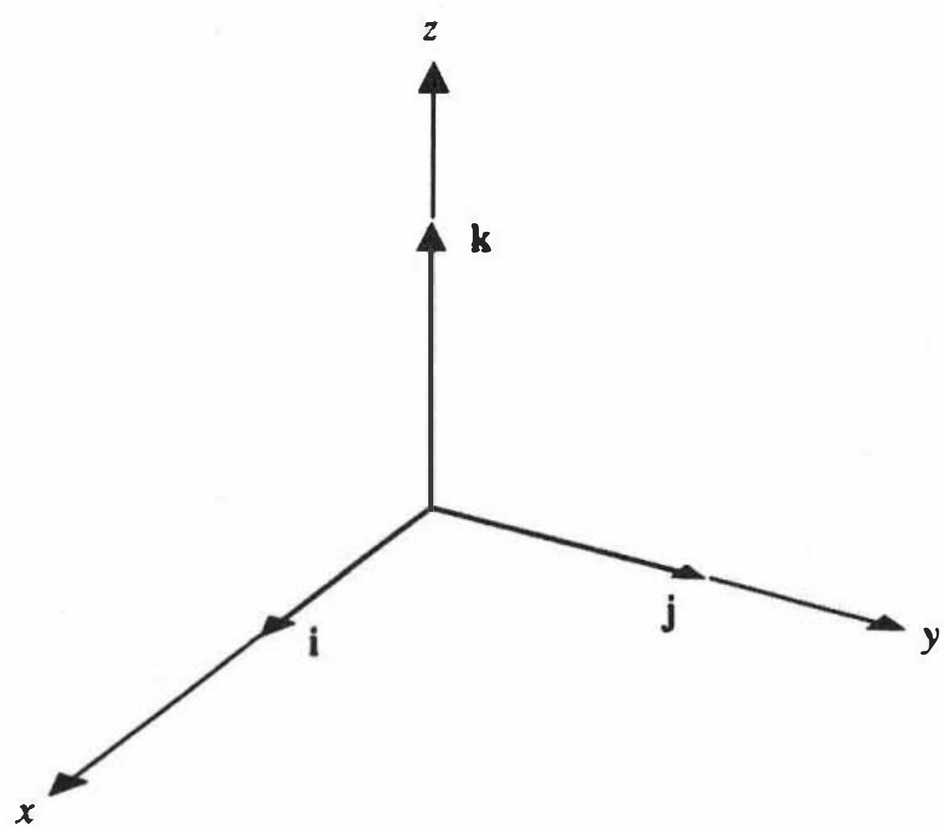


Figura 10.27

Claramente, resulta que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad y \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k},$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad y \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i},$$
$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad y \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j},$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Estas ecuaciones y la propiedad distributiva de la multiplicación vectorial permiten deducir una fórmula adecuada para el producto vectorial cuando los vectores están expresados en términos de **i**, **j** y **k**. De este modo, si

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k} \qquad y \qquad \mathbf{B} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k},$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}) \times (a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}) \\ &= a_1a_2\mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_1b_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_1c_2\mathbf{i} \times \mathbf{k} \\ &\quad + a_2b_1\mathbf{j} \times \mathbf{i} + b_1b_2\mathbf{j} \times \mathbf{j} + b_1c_2\mathbf{j} \times \mathbf{k} \\ &\quad + a_2c_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} + b_2c_1\mathbf{k} \times \mathbf{j} + c_1c_2\mathbf{k} \times \mathbf{k} \\ &= \mathbf{0} + a_1b_2\mathbf{k} - a_1c_2\mathbf{j} - a_2b_1\mathbf{k} + \mathbf{0} \\ &\quad + b_1c_2\mathbf{i} + a_2c_1\mathbf{j} - b_2c_1\mathbf{i} + \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Por lo cual

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (b_1c_2 - b_2c_1)\mathbf{i} + (a_2c_1 - a_1c_2)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}.$$

Esta ecuación proporciona una fórmula para el producto vectorial; sin embargo, resulta una forma* más conveniente cuando el miembro derecho de la ecuación se expresa como determinante.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 1 Los vectores **A** y **B** forman un ángulo de $\pi/6$. Si la longitud de **A** es 5 y la longitud de **B** es 8, encuentre el área del paralelogramo del cual **A** y **B** son lados consecutivos.

Solución El área del paralelogramo es igual al valor absoluto de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. A partir de la definición de producto vectorial,

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\text{sen } \theta = (5)(8)\text{sen } \pi/6 = 20$$

El área del paralelogramo es de 20 unidades cuadradas. ■

Ejemplo 2 Los puntos $A(1, 0, -1)$, $B(3, -1, -5)$ y $C(4, 2, 0)$ son los vértices de un triángulo.

Solución Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman dos lados del triángulo.
ducto vectorial es igual al área del paralelogramo del cual los vectores son lados adyacentes.
encuentra

*Véase el apéndice A para la definición de determinante.

$$\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \qquad \overrightarrow{AC} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

y

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

La magnitud de este vector es $\sqrt{49+196+49} = 7\sqrt{6}$; por tanto, el área del triángulo es $7/2\sqrt{6}$ ■

Ejemplo 3 Los puntos $A(2, -1, 3)$, $B(4, 2, 5)$ y $C(-1, -1, 6)$ determinan un plano. Encuentre la distancia del plano al punto $D(5, 4, 8)$.

Solución Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinan un plano, como se indica en la figura 10.28. El producto cruz $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ es perpendicular al plano, y $\overrightarrow{AD}$ es el vector de A al punto dado D. El producto escalar de $\overrightarrow{AD}$ y un vector unitario perpendicular al plano produce la distancia requerida d. En consecuencia, se escribe

$$\overrightarrow{AD} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \qquad \overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \qquad \overrightarrow{AC} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{k},$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 9\mathbf{k}.$$

El vector $9\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y, por tanto, es perpendicular al plano de A, B y C. Este vector se divide entre su longitud, $3\sqrt{34}$, para obtener un vector unitario. Finalmente, la distancia d del plano a D está dada por

$$d = (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \cdot \frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{34}} = \frac{2\sqrt{34}}{17}. \quad ■$$

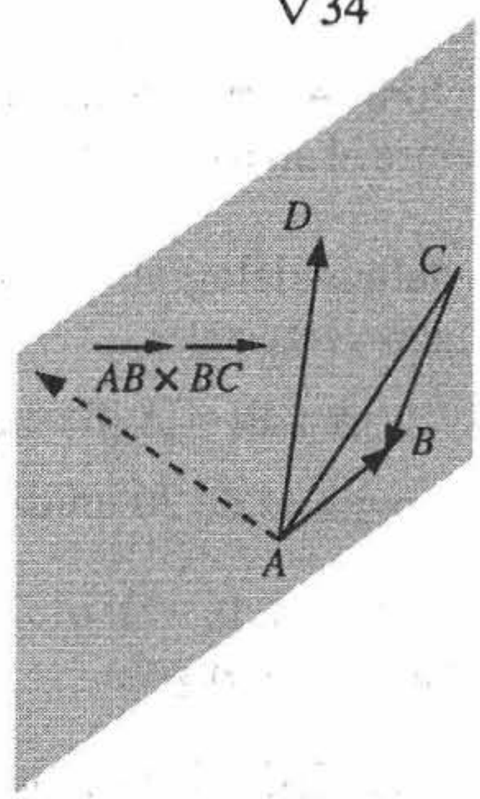


Figura 10.28

Ejemplo 4 Encuentre las ecuaciones, en forma simétrica, de la recta de intersección de los planos $2x - y + 4z = 3$ y $3x + y + z = 7$.

Solución Las ecuaciones deseadas pueden escribirse inmediatamente si se conocen las coordenadas de cualquier punto de la recta y cualquier vector paralelo a la recta. Si $z = 0$

en las ecuaciones de los planos y se despejan x y y, se encuentra que (2, 1, 0) es un punto de la recta. Las normales a los planos están dadas por los vectores

$$\mathbf{N}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{N}_2 = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

El producto vectorial es paralelo a la recta de intersección de los planos. Se encuentra

$$\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

Este vector se divide entre 5 y la ecuación de la recta se escribe como

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}.$$

Se observa que éste es el mismo tipo de problema que el del ejemplo 4 de la sección 10.5. ■

Distancia de una recta a un punto

Sea L (Fig. 10.29) una recta que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector unitario $\mathbf{u}$. Después, sea $P_1(x_1, y_1, z_1)$ cualquier punto que no esté sobre la recta y sea $\mathbf{V}$ el vector $\overrightarrow{P_0P_1}$. Para hallar la distancia perpendicular de la recta L a P_1, se toma el producto vectorial de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{u}$. De esta manera,

$$d = |\mathbf{V}| \operatorname{sen}\theta = |\mathbf{u}||\mathbf{V}| \operatorname{sen}\theta = |\mathbf{u} \times \mathbf{V}|.$$

Ejemplo 5 Encuentre la distancia de la recta que pasa por $P_2(3, 0, 6)$ y $P_3(5, -2, 7)$ al punto $P_1(8, 1, -3)$.

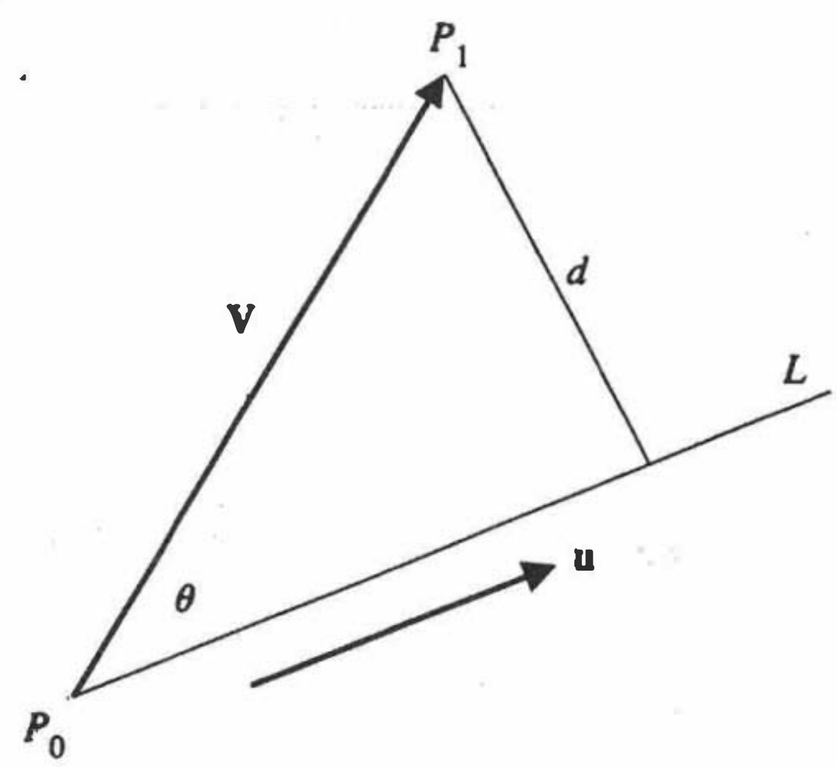


Figura 10.29

Solución El vector $\overrightarrow{P_3P_2} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, y así $\mathbf{u} = \frac{1}{3}(-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$. Ahora $\overrightarrow{P_2P_1} = \mathbf{V} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 9\mathbf{k}$. Por tanto,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{V} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -9 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(-17\mathbf{i} - 23\mathbf{j} - 14\mathbf{k})$$

y

$$d = |\mathbf{u} \times \mathbf{V}| = \frac{13}{3}\sqrt{6}. \quad \blacksquare$$

En la sección 2.
cuando ambas se encuentran en el plano xy. Se da ahora una deducción mucho más corta, usando vectores.

La ecuación $Ax + By + C = 0$ en el espacio tridimensional representa un plano paralelo al eje z (Teorema 9.2);
intersección del plano y del plano xy es una recta, y las coordenadas x y y de todos los puntos de intersección satisfacen la ecuación $Ax + By + C = 0$. Al restringirse al plano xy, se tiene una recta y un vector perpendicular a la recta. Ahora, sea $P_1(x_1, y_1)$ cualquier punto en el plano xy (Fig. 10.30). Si $B \neq 0$, la recta corta el eje y en $P(0, -C/B)$. El producto escalar del vector $\overrightarrow{PP_1}$ y un vector unitario $\mathbf{u}$, perpendicular a la recta, proporciona la distancia d.

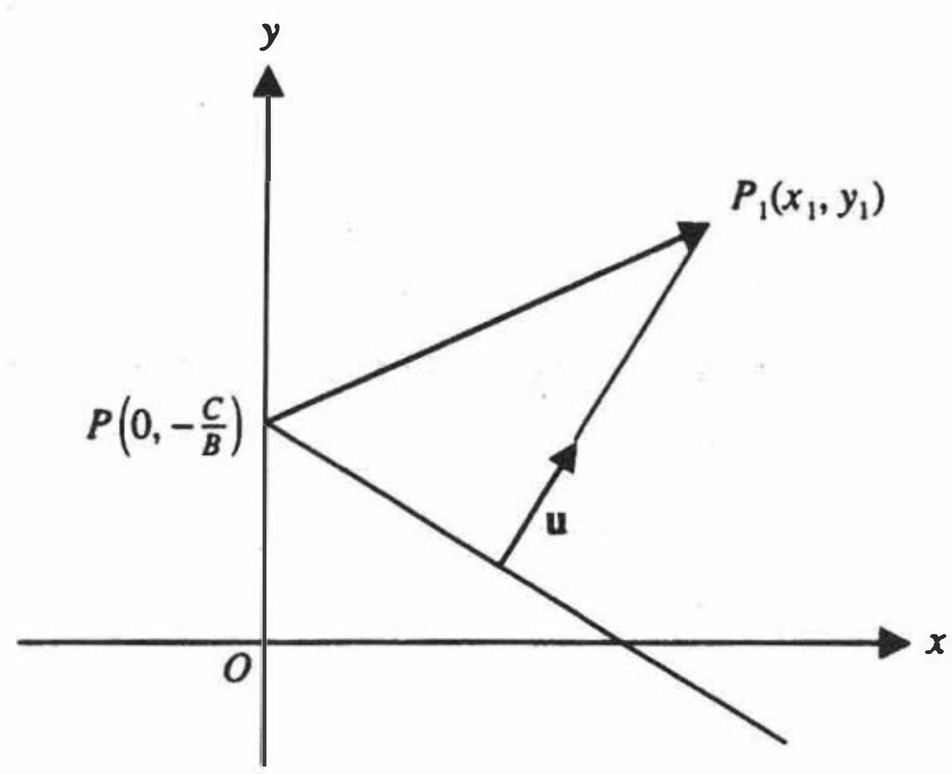


Figura 10.30

Como

$$\overrightarrow{PP_1} = x\mathbf{i} + \left(y_1 + \frac{C}{B}\right)\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{u} = \frac{A\mathbf{i} + B\mathbf{j}}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

se tiene

$$d = \left[x_1\mathbf{i} + \left(y_1 + \frac{C}{B}\right)\mathbf{j}\right] \cdot \frac{A\mathbf{i} + B\mathbf{j}}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Así, un producto escalar proporciona de inmediato la fórmula que se busca.
güedad del signo se examinó en la sección 2.

Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 6, encuentre el producto cruz, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, de los vectores y un vector unitario perpendicular a los dos vectores dados.

1. $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$,
   $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
2. $\mathbf{A} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$,
   $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
3. $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$,
   $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$
4. $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$,
   $\mathbf{B} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
5. $\mathbf{A} - 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$,
   $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
6. $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$,
   $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

Calcúlese el área del paralelogramo descrito en los ejercicios 7 a 10.

7. $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ son lados adyacentes.
8. $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ son lados adyacentes.
9. Los puntos $A(4, 1, 0)$, $B(1, 2, 1)$, $C(0, 0, 6)$ y $D(3, -1, 5)$ son vértices del paralelogramo $ABCD$.
10. Los puntos $A(1, -1, 1)$, $B(3, 3, 1)$, $C(4, -1, 4)$ y $D(2, -5, 4)$ son vértices del paralelogramo $ABCD$.

Encuentre el área del triángulo descrito en cada uno de los ejercicios 11 a 14.

11. Los vértices son $A(-1, 3, 4)$, $B(1, 2, 5)$ y $C(2, -3, 1)$.
12. Los vértices son $A(1, 0, 4)$, $B(3, -3, 0)$ y $C(0, 1, 2)$.
13. Los vectores $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, dibujados desde el origen, son dos lados.
14. Los extremos de los vectores $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, dibujados desde el origen, son los vértices.
15. Encuentre el área del triángulo en el plano xy cuyos vértices son los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3). Use producto vectorial.
16. Escriba la ecuación del plano que pasa por los puntos $(2, -4, 3)$, $(-3, 5, 1)$ y $(4, 0, 6)$.
17. Escriba la ecuación del plano que contiene los puntos $(2, 1, 0)$, $(3, 0, 2)$ y $(0, 4, 3)$.
18. Encuentre la distancia del punto $(6, 7, 8)$ al plano que contiene a los puntos $(-1, 3, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(1, 1, 3)$.
19. Encuentre la distancia del punto $(-4, -5, -3)$ al plano que pasa por los puntos $(4, 0, 0)$, $(0, 6, 0)$ y $(0, 0, 7)$.
20. Encuentre las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(3, 1, -2)$ y es paralela a cada uno de los planos $x - y + z = 4$ y $3x + y - z = 5$.

21. Encuentre las ecuaciones de la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta de intersección de los planos $2x - y - z - 2$ y $4x + 2y - 4z = 1$.

22. Encuentre una representación paramétrica de la recta de intersección de los dos planos del ejercicio 20 y también del ejercicio 21.

23. Un plano pasa por el punto (1, 1, 1) y es perpendicular a cada uno de los planos $2x + 2y + z = 3$ y $3x - y - 2z = 5$. Encuentre su ecuación.

24. Un plano pasa por el punto (0, 0, 0) y es perpendicular a la recta de intersección de los planos $5x - 4y + 3z = 2$ y $x + 2y - 3z = 4$. Encuentre la ecuación del plano.

25. Una recta pasa por los puntos (1, 3, 1) y (3, 4, –1). Encuentre la distancia de la recta al punto (4, 4, 4).

26. Una recta pasa por (3, 2, 1) y es paralela al vector $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Encuentre la distancia de la recta a (–3, –1, 3).

27. Encuentre la distancia de la recta $x/2 = y/3 = z/1$ al punto (3, 4, 1).

28. Encuentre la distancia de la recta $(x - 2)/2 = y/2 = (z - 1)/1$ al punto (0, 0, 0).

29. Sean L_1 y L_2 (Fig. 10.31) rectas que no son paralelas ni se intersecan. Sea $\overrightarrow{P_1P_2}$ un vector que va de cualquier punto sobre L_1 a cualquier punto sobre L_2, $\mathbf{V}_2$ un vector paralelo a L_2 y $\mathbf{V}_2$ paralelo a L_2. Entonces $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$ es perpendicular a ambas rectas. Muestre que la distancia perpendicular entre L_1 y L_2 es

$$d = |\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \mathbf{u}|,$$

donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario paralelo a $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$.

En los ejercicios 30 a 33 encuentre la distancia perpendicular entre las dos rectas.

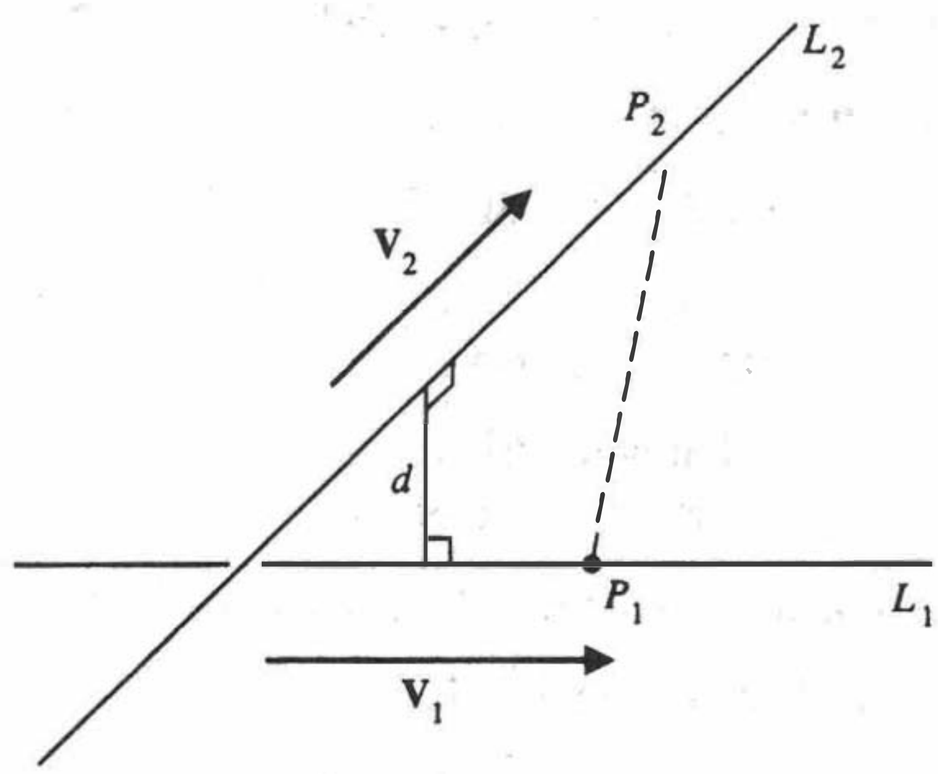


Figura 10.31

30. L_1 pasa por $P_1(2,3,1)$ en la dirección de $\mathbf{V}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, y L_2 pasa por $P_2(4, 2, 0)$ en la dirección de $\mathbf{V}_2 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

31. L_1 pasa por (2, 1, –1) y (–1, 3, 2). L_2 pasa por (4, 0, 5) y (3, 4, 0).

32. Las ecuaciones de L_1 son $(x + 2)/3 = (y + 3)/2 = z/2$. Las ecuaciones de L_2 son $(x - 1)/2 = (y + 4)/3 = (z - 2)/4$.

33. L_1 pasa por (4, 1, 0) y (0, 0, 6). L_2 pasa por (1, 2, 1) y (3, –1, 5). ¿Se intersecan las rectas?

34. En la figura 10.
A. El vector **E** se rota 90°, como se indica, y después se multiplica por |**A**| para producir **A** × **B**. Diga por qué estas operaciones conducen a **A** × **B**.

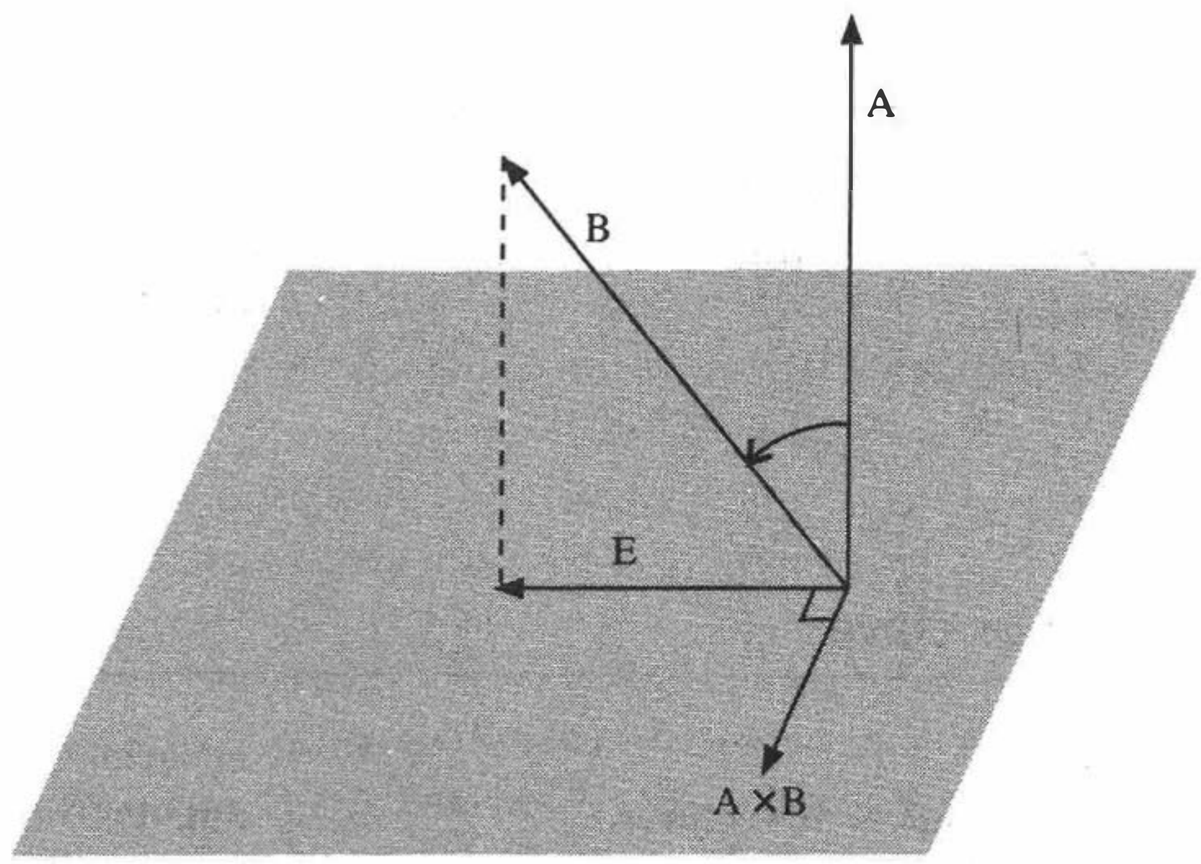
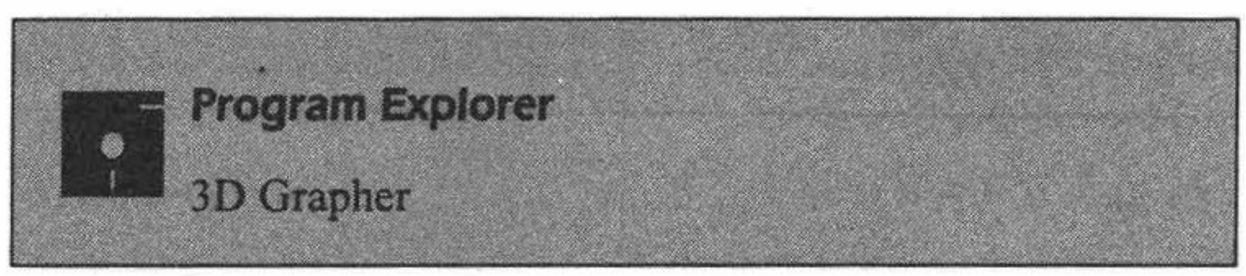


Figura 10.32

A continuación, **B**, **C** y **B** + **C** forman un triángulo. Proyecte este triángulo sobre el plano perpendicular a **A**, formando así otro triángulo vectorial. Haga rotar 90° el nuevo triángulo y multiplique cada lado por |**A**|. Observe que los lados del triángulo final son **A** × **B**, **A** × **C** y **A** × (**B** + **C**), y que

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}.$$



EJERCICIOS DE REPASO

En cada uno de los ejercicios 1 a 4, encuentre las longitudes de **A** y **B**, **A** • **B**, **A** × **B**, la proyección escalar de **B** sobre **A**, el vector proyección de **B** sobre **A**, el coseno del ángulo entre los vectores y un vector unitario en la dirección de **A**.

1. $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
2. $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
3. $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
4. $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
5. Encuentre la ecuación del plano perpendicular al vector $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y que pasa por el punto (3, –4, –2).
6. Encuentre la ecuación del plano paralelo al plano $3x - 4y + 7z = 3$ y que pasa por el punto (1, –1, 3).

7. Encuentre la ecuación del plano que pasa por los tres puntos (1, 2, –1), (–2, 1, 1) y (2, 4, 2).

8. Encuentre la distancia del plano $x - 2y + 2z = 5$ al punto (–1, 3, 2).

9. Encuentre ecuaciones simétricas y paramétricas para la recta paralela al vector $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y que pasa por el punto (1, –2, 3).

10. Encuentre ecuaciones simétricas para la recta que pasa por los puntos (2, –3, 4) y (–3, 5, 7).

11. Encuentre ecuaciones simétricas para la recta de intersección de los planos

$$2x + y - z + 3 = 0 \quad \text{y} \quad x - y + 3z + 5 = 0.$$

12. Encuentre los cosenos directores y la recta dirigida de $A(-6, 2, 1)$ a $B(3, 5, 4)$.

13. Encuentre la distancia de la recta que pasa por $A(1, -2, -3)$ y $B(3, -5, -3)$ al punto $C(1, -3, 0)$.

14. Encuentre las coordenadas de los puntos donde la recta

$$\frac{x}{3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-6}{-4}$$

corta cada uno de los planos coordenados,

15. Si $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{C} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, encuentre un valor para $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$.

Términos clave

vector, pág.313
suma y diferencia de vectores, pág.314,315
escalar, pág.317
vector unitario, pág.318
producto escalar (punto), pág.330
normal a un plano, pág.337
distancia de un punto a un plano, pág.337
ecuaciones simétricas de una recta, pág.343
ángulos directores, números directores, cosenos directores, pág.345
producto vectorial (cruz), pág.349
distancia de una línea a un punto, pág.353

EXAMEN SOBRE EL CAPÍTULO

1. Si $\vec{\mathbf{A}} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, encuentre

   a) $|\vec{\ }$ b) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$

   c) $\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}$ d) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$

   e) proyección vectorial de $\vec{\mathbf{A}}$ sobre $\vec{\mathbf{B}}$

   f) ángulo entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$

   g) $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$

   h) $\vec{\mathbf{A}} \cdot (\vec{\mathbf{B}} \times (\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}))$

2. Encuentre la ecuación de la esfera con centro (–1, 2, 7) y tangente a $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

3. Si $A(1, 2, -1)$ y $B(3, 1, 2)$ son puntos dados, encuentre

   a) ecuaciones simétricas para la línea de A a B

   b) cosenos directores de la línea de A a B

4. Encuentre la ecuación del plano paralelo a $x - 5y - 7z - 4 = 0$ y que pasa por el punto (0, 1, – 4).

5. Encuentre el ángulo entre los planos $x - 5y + z - 12 = 0$ y $2x + 4y + 3z = 9$.

6. Un aeroplano tiene una velocidad de 315 km/h respecto al viento y se desplaza con rumbo de 90°. Sopla un viento del noroeste (rumbo 135°) a 45 km/h. Encuentre la trayectoria del aeroplano y la velocidad respecto al suelo.

Capítulo 11

Ajuste de curvas

En capítulos anteriores se encontraron ecuaciones de curvas que satisfacen condiciones geométricas dadas. En cada caso todos los puntos de la curva se fijaron de manera definitiva mediante las condiciones prescritas. A partir de ahora se aborda un aspecto diferente y más complicado del problema de encontrar ecuaciones que representen información conocida. El problema no posee una importancia geométrica fundamental, sino que más bien adquiere relevancia en cuanto que la geometría analítica resulta útil al científico. Los científicos experimentales realizan observaciones y mediciones de varios tipos de fenómenos naturales. Las mediciones en una investigación con frecuencia representan a dos variables relacionadas entre sí. En muchas situaciones el estudio que se lleva a cabo puede avanzar con la presentación de una ecuación que exprese la relación, o relación aproximada, entre las dos variables involucradas. En ese momento la ecuación puede utilizarse para calcular valores correspondientes de las variables, diferentes de aquellos obtenidos mediante mediciones. La ecuación se conoce como **ecuación empírica** y el proceso seguido se llama **ajuste de la curva**.

Suponga, por ejemplo, que se han colocado varios pesos sobre el punto medio de una viga sostenida en sus extremos. Si para cada peso se mide la deflexión de la viga en su punto medio, se obtiene una serie de valores correspondientes. En cada pareja un valor es el peso y el otro la deflexión producida por el peso. La tabla muestra las lecturas realizadas, con x representando el peso en kilos y y la deflexión en centímetros. Las parejas de valores se grafican en la figura 11.1. Los puntos parecen encontrarse muy cerca de lo que sería una línea recta y sugieren que la deflexión es proporcional al peso; es decir, una ecuación de la forma

$$y = mx + b$$

representa la relación, o relación aproximada, entre el peso y la deflexión. En vista de que los puntos no yacen exactamente sobre una línea recta, ninguna ecuación lineal puede ser satisfecha por todas las parejas de datos. Se presenta entonces el problema de elegir una ecuación lineal particular. Se podría trazar una recta que pasara muy cerca de cada punto. Es deseable, sin embargo, seguir un procedimiento que localice una recta definida.

x	100	120	140	160	180	200
y	0.45	0.55	0.60	0.70	0.80	0.85

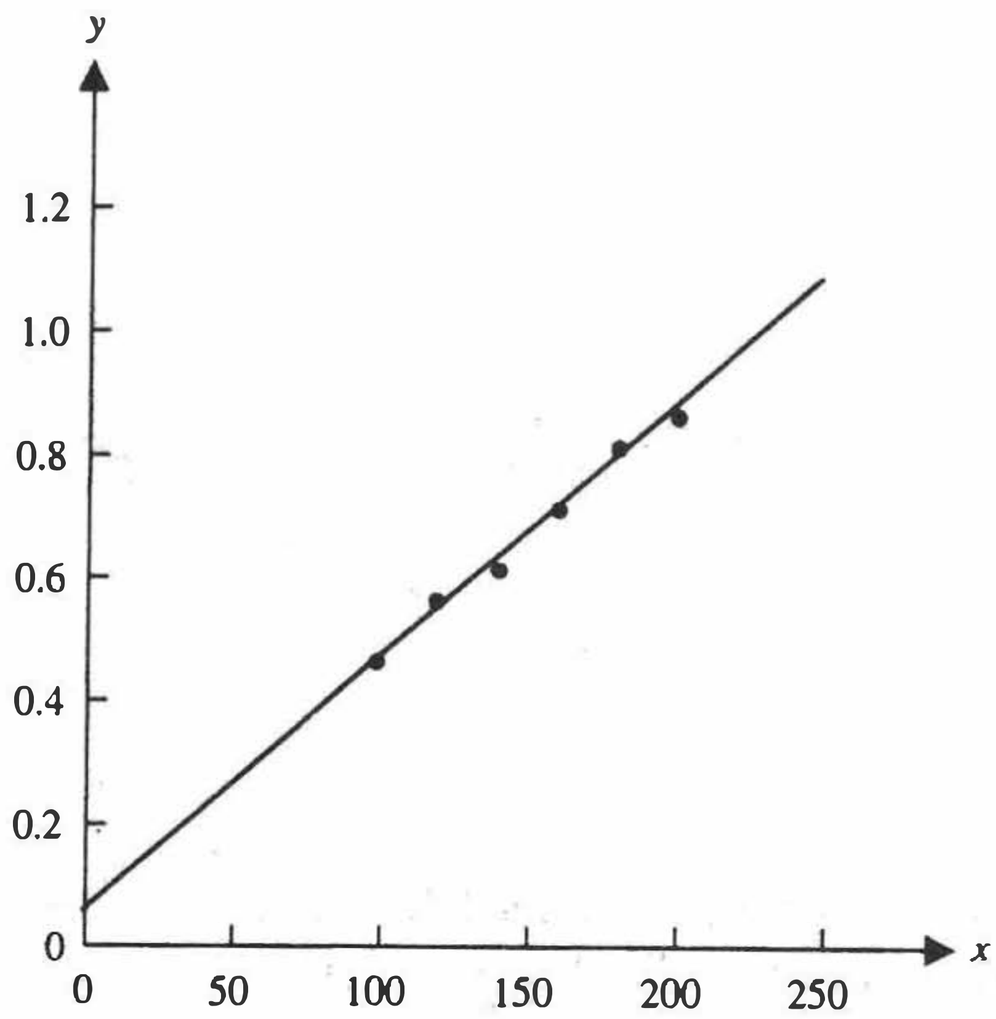


Figura 11.1

11.1 MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

Suponga que se han dado n puntos sobre un plano cuyas coordenadas son (x_1, y_1), (x_2, y_2),...(x_n, y_n). El **residuo** de cada uno de los puntos relativo a una curva se define como la ordenada del punto menos la ordenada de la curva para el mismo valor de x. El total de los residuos puede examinarse para determinar si la curva representa un buen ajuste para los puntos. Una curva se considera un buen ajuste si cada uno de los residuos es pequeño. Como algunos de los residuos pueden ser positivos y otros negativos, su suma podría estar cerca de cero en el caso de una curva que fuera un mal ajuste para los puntos. Por consiguiente, la suma de los residuos no proporciona una medida adecuada de la precisión del ajuste. Por esta razón se recurre a los cuadrados de los residuos, evitando así las cantidades negativas. Si la suma de los cuadrados de los residuos es pequeña, se sabría que la curva pasa cerca de cada uno de los n puntos. El mejor ajuste proporcionado por dos curvas del mismo tipo es aquel para el cual la suma de los cuadrados de los residuos es más pequeña. La mejor curva de ajuste de cierto tipo es aquella para la cual la suma de los cuadrados de los residuos es un mínimo.

NOTA HISTÓRICA

Parece ser que **Carl Gauss** (1777–1855) diseñó el método de mínimos cuadrados cuando aún era un adolescente, pero fue **Adrien-Marie Legendre** (1752–1833) quien primero publicó el método y lo bautizó. Ambos matemáticos usaron el método para calcular las órbitas de asteroides y cometas. También disputaron entre sí respecto a quién había sido el descubridor de tan fructífero método.

Iniciando con la situación más sencilla, se mostrará cómo determinar la recta que mejor ajusta los n puntos dados. Se escribe el modelo lineal

$$y = mx + b$$

donde se han de encontrar valores para m y n de manera que la suma de los cuadrados de los residuos de los n puntos sea un mínimo. El residuo del punto (x_1, y_1) es $y_1 - (mx_1 + b)$. La cantidad y_1 es la ordenada del punto y $(mx_1 + b)$ es la ordenada de la recta cuando $x = x_1$. Por ello los residuos de los puntos son

$$y_1 - (mx_1 + b), y_2 - (mx_2 + b), \ldots, y_n - (mx_n + b)$$

y sus cuadrados son

$$\begin{aligned} &y_1^2 - 2mx_1y_1 - 2y_1b + m^2x_1^2 + 2mx_1b + b^2, \\ &y_2^2 - 2mx_2y_2 - 2y_2b + m^2x_2^2 + 2mx_2b + b^2, \\ &\vdots \\ &y_n^2 - 2mx_ny_n - 2y_nb + m^2x_n^2 + 2mx_nb + b^2. \end{aligned}$$

Se usa la siguiente notación para expresar de manera conveniente la suma de estas expresiones.

$$\begin{aligned} \sum x &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ \sum x^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \\ \sum xy &= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n. \end{aligned}$$

Representando mediante R la suma de los cuadrados de los residuos, se obtiene

$$R = \sum y^2 - 2m\sum xy - 2b\sum y + m^2\sum x^2 + 2mb\sum x + nb^2. \qquad \textbf{(11.1)}$$

Cabe señalar que todas las cantidades que aparecen en el miembro derecho de esta ecuación tienen un valor fijo, salvo m y b. Por ejemplo, $\sum y^2$ no es una variable; representa la suma de los cuadrados de las ordenadas de los n puntos fijos.

En esta situación el problema es determinar valores de m y b que hagan de R un mínimo. La expresión para R contiene la primera y la segunda potencias tanto de m como de b. Sin embargo, si se trata a b como una constante no especificada, entonces las variables en la ecuación son R y m. Dado que R aparece de manera lineal y m de manera cuadrática, la gráfica de la ecuación es una parábola. Eligiendo como horizontal al eje m y como vertical al eje R, se observa que la parábola tendría un eje vertical. Además, la parábola se abre hacia arriba debido a que R, por ser la suma de expresiones cuadradas, no es negati· .. En consecuencia, el valor mínimo de R es la ordenada del vértice. Por tanto R alcanza el menor valor posible cuando m es igual a la abscisa del vértice de la parábola. La abscisa del vértice se encuentra escribiendo la ecuación (11.1) en la forma usual (Sec. 3.2). De esta manera se puede mostrar que R alcanza su valor mínimo cuando

$$m\sum x^2 + b\sum x - \sum xy = 0.$$

De manera similar, se puede considerar a m como una constante y así obtener la ecuación

$$m\sum x + nb - \sum y = 0.$$

Resolviendo de manera simultánea las dos ecuaciones anteriores para obtener los valores de m y de b, se obtiene (Sec. 2.3)

$$\boxed{m = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}, \qquad b = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}.}$$

Estas fórmulas permiten calcular los valores de m y de b de la recta que mejor se ajusta a un conjunto de puntos. Su uso se ilustra en un ejemplo.

Ejemplo 1 Encuentre la recta que mejor se ajusta a los datos graficados en la figura 11.1.

Solución En la página 344 se presentan las seis parejas de valores de x y y. Estos datos se utilizan para calcular las sumas que aparecen en la ecuación (11.2) y obtener

$$\sum x = 100 + 120 + 140 + 160 + 180 + 200 = 900,$$
$$\sum y = 0.45 + 0.55 + 0.60 + 0.70 + 0.80 + 0.85 = 3.95,$$
$$\sum x^2 = 100^2 + 120^2 + 140^2 + 160^2 + 180^2 + 200^2 = 142{,}000,$$
$$\sum xy = 100(.45) + 120(.55) + 140(.60) + 160(.70) + 180(.80) + 200(.85) = 621.$$

Estos resultados, al sustituirse en la ecuación (11.2) para calcular m y b, producen lo siguiente:

$$m = \frac{6(621) - 900(3.95)}{6(142{,}000) - 900^2} = \frac{171}{42{,}000} = 0.0041,$$

$$b = \frac{142{,}000(3.95) - 900(621)}{42{,}000} = 0.048.$$

Usando estos valores para m y b se encuentra que la ecuación de la recta que mejor se adapta a los datos es

$$y = 0.0041\,x + 0.048$$

Esta ecuación proporciona de manera aproximada la relación que existe entre el peso y la deflexión, y es válida para pesos que no hacen flexionar la viga más allá de su límite elástico. Por ejemplo, la deflexión producida por un peso de 400 kg es $y = 0.0041\,(400) + 0.048 = 1.69$ centímetros. Los datos y la recta se muestran en la figura 11.1. ■

Debería resultar evidente para el lector que no se trata de resolver muchos problemas como el presentado en el ejemplo 1, sin el uso de la calculadora. De hecho, el método de los mínimos cuadrados, si bien es deducible a partir de propiedades básicas de funciones cuadráticas (parábolas), constituye un tema del análisis numérico y puede analizarse en términos muy abstractos. Aun así las ecuaciones básicas, como se vio en la ecuación 11.2, son sumas, diferencias, productos y cocientes de números reales. Es relativamente sencillo programar un computador para tomar los datos correspondientes a los puntos dados, y calcular la pendiente y la ordenada al origen de la recta que "mejor se ajusta". De hecho, muchas de las calculadoras "para científicos" ya incluyen el programa, generalmente en un modo de "estadística". Se recomienda al lector que utilice dicho tipo de calculadora, y si es posible que use una calculadora con pantalla para graficación que grafique los datos y la recta que mejor se ajuste a ellos. Busque el apartado de "Regresión lineal" en el manual que acompaña a la calculadora.

En opinión del autor de este texto, no es importante que los estudiantes memoricen las ecuaciones (11.2).

En el ejemplo que sigue se retoma el problema del inicio de una epidemia de sarampión, el cual ya se presentó en el ejemplo 6 de la sección 1.6.

Ejemplo 2 A raíz de la aparición de una epidemia de sarampión, un representante del departamento de salud pública observa que ocurren 5 nuevos casos durante la primer semana, 18 nuevos casos en la segunda, 36 en la tercera y 59 en la cuarta. ¿Cuántos nuevos casos cabría esperar en la quinta semana?

Solución Los datos son $\{(1, 5),(2, 18),(3, 36),(4, 59)\}$ y, por ende, $n = 4$. Usando una calculadora científica se encuentra que $m = 18$ y $b = -15.5$. La recta que mejor ajusta los datos, calculada mediante el método de mínimos cuadrados, está dada por

$$y = 18x - 15.5.$$

Así, si $x = 5$, entonces $y = 74.5$. El representante del departamento de salud pública puede esperar que aparezcan 74 o 75 nuevos casos durante la quinta semana. ■

Ejercicios

Encuentre la ecuación de la recta que mejor se ajuste a los conjuntos de puntos que corresponden a los ejercicios 1 y 2. Grafique los puntos y trace las rectas.

1. $(1, 8),(4, 6),(5, 5),(8, 3),(9, 2),(11, 1)$
2. $(-2, -10),(0, -5),(1, 0),(2, 5),(4, 8)$
3. En la tabla que aparece a continuación se registran las longitudes y (en cm) que alcanza un resorte y que corresponden a distintos pesos x (en kg) que se le han colgado. Encuentre la recta, $y = mx + b$, que mejor se ajuste a los datos. Utilice la ecuación resultante para encontrar la longitud del resorte cuando el peso sea de 17 kilos.

x	10	20	30	40	50
y	11.0	12.1	13.0	13.9	15.1

4. Un negocio obtuvo, al final de cada año, las ganancias netas que se detallan en la siguiente tabla

Año	1989	1990	1991	1992
Ganancia	\$10,000	\$12,000	\$13,000	\$15,000

Determine el mejor ajuste lineal y prediga la ganancia para 1993.

5. En la siguiente tabla se muestra, para cinco décadas, el número de alumnos inscritos en un colegio a final de cada década t. Encuentre la recta de la forma $N = mt + b$

que mejor se ajuste a estos datos. Haga una predicción de la matrícula al final de la sexta década.

t	1	2	3	4	5
N	8,000	9,000	10,100	11,400	13,700

6. La relación entre la cantidad total de calor H en un kg de vapor saturado a T grados Celsius es $H = mT + b$. Determine los valores de m y b que mejor se ajusten a estos datos.

T	50	70	90	110
H	623	627	632	636

11.2 MODELOS EXPONENCIALES

Como se vio en el capítulo 6, muchas situaciones que se refieren al crecimiento o decaimiento se modelan en términos de funciones exponenciales de la forma

$$y = ae^{bx}. \tag{11.3}$$

Si bien ninguna recta puede ajustarse adecuadamente a un modelo exponencial, se pueden tomar los logaritmos naturales de los miembros de ambos lados de la ecuación 11.3 y obtener

$$\ln y = \ln a + bx,$$

la cual resulta lineal en x y $z = \ln y$, por ser a y b constantes. Se puede entonces aplicar el método de mínimos cuadrados a los nuevos datos, que consisten en los puntos $(x, \ln y)$ para los que (x, y) satisface la ecuación (11.3).

Ejemplo 1 En cierto cultivo el número N de bacterias por unidad de volumen, después de t horas, está dado mediante la tabla que aparece a continuación. Encuentre a y b de manera que $N = ae^{bt}$ se ajuste a los siguientes datos:

t	1	2	3	4
N	70	88	111	127

Solución Tomando logaritmos como se sugiere, los datos se transforman para obtener lo siguiente:

t	1	2	3	4
$\ln N$	4.25	4.48	4.71	4.84

Según el análisis de regresión lineal, la recta que mejor se ajusta a los datos está dada por

$$y = \ln N = \ln a + bt$$

donde $\ln a = 4.07$ y $b = 0.2$.
deseado, como se ilustra en la figura 11.2, está dado por

$$N = 58.\quad e^{0.2t}. \quad \blacksquare$$

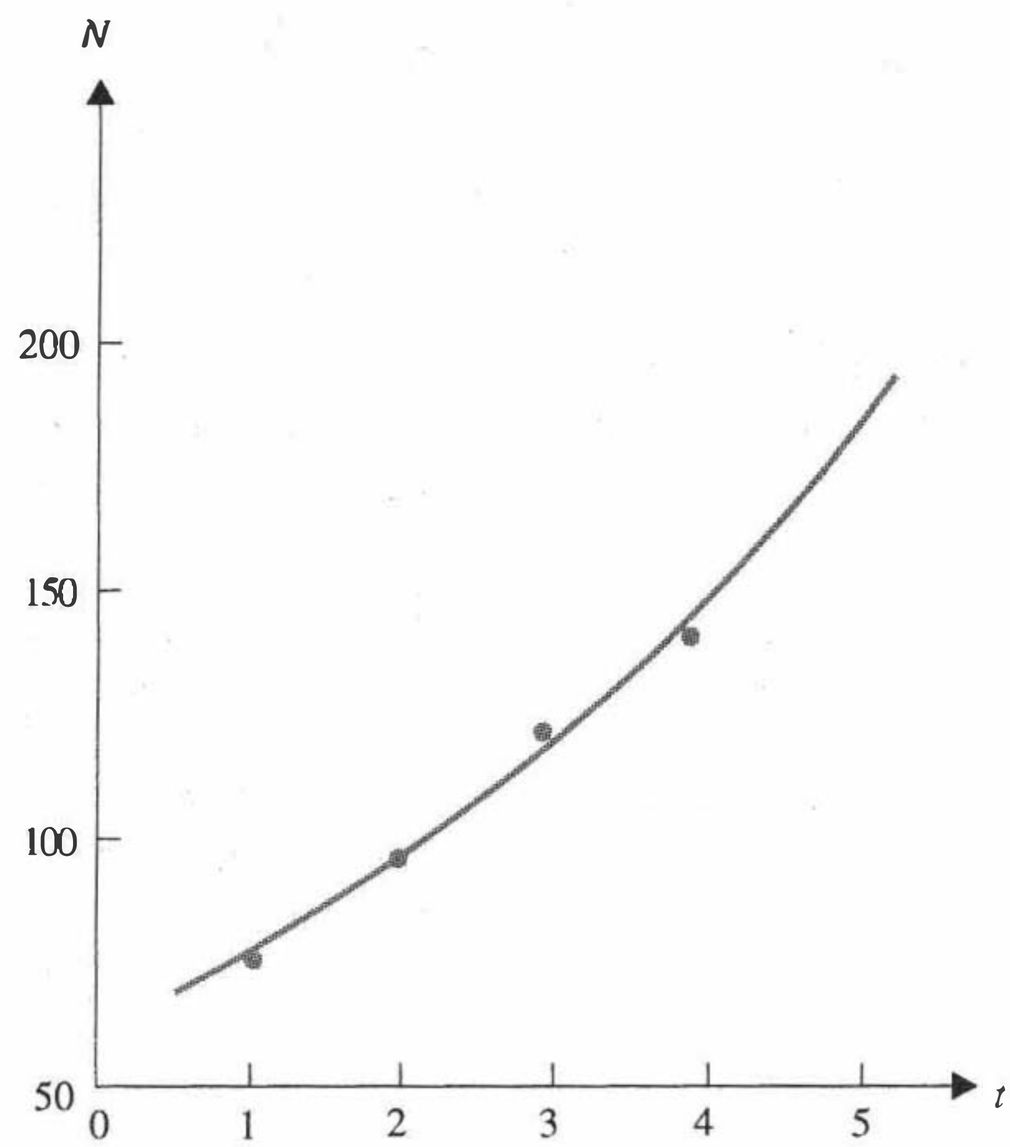


Figura 11. 2

Ejercicios

En los ejercicios 1 a 3, encuentre el mejor ajuste utilizando el modelo exponencial.

1.

x	-3	-1	1	3	5
y	0.8	1.5	2.7	4.9	9.0

2.

x	0	1	2	3	5
y	3.0	2.5	2.1	1.6	1.1

3.

x	1	2	3	4
y	3	4.5	7.8	16

4. En un cultivo el número de bacterias N por unidad de volumen un cierto tiempo t corresponde a lo que aparece en la tabla. Encuentre la mejor relación de la forma $N = ae^{bt}$.

t	0	2	4	6	8
N	10	16	25	40	63

5. La temperatura T (en grados Celsius) de un cuerpo que está siendo enfriado se midió en distintos tiempos t (minutos), como lo indica la tabla. Encuentre la fórmula exponencial que mejor se ajuste a T en términos de t.

t	0	1	2	3	4	5
T	100	79	63	50	40	32

6. En la tabla se muestra la presión atmosférica p en unidades de libras por pulgada cuadrada, a una altura h expresada en miles de pies. Proporcione una fórmula exponencial para p expresada en términos de h.

h	0	5	10	15	20
p	14.6	12.1	10.1	8.4	7.0

7. Considere nuevamente los datos de la epidemia de sarampión que aparecen en el ejemplo 2, sección 11.1, y utilice un modelo exponencial. Bajo el supuesto de un modelo exponencial, ¿cuántos nuevos casos cabría esperar para la quinta semana? ¿Qué modelo parece ser el más adecuado? ¿Por qué?

EJERCICIOS DE REPASO

1. Una compañía de encurtidos tuvo una ganancia de \$ 5218 en 1990, \$ 8795 en 1991 y 11350 en 1992. Encuentre el ajuste lineal para los datos que resulta de usar el método de mínimos cuadrados, y prediga la ganancia para 1993. Grafique la curva.

2. Para la compañía de encurtidos que se trató en el ejercicio 1, use el modelo exponencial para predecir las ganancias de 1993 y 1994. Grafique la curva.

3. Convierta el modelo logarítmico $y = a + b \ln x$ a un modelo lineal, utilizando para ello la sustitución $z = e^{\ln y}$. A continuación use el método de mínimos cuadrados a fin de encontrar el mejor ajuste (en el modelo logarítmico) para los datos siguientes:

x	0.5	1	3	5	8
y	0	3.1	7.8	9.9	12

Términos clave

método de mínimos cuadrados, pág. 360

modelo lineal, pág. 361

modelo exponencial, pág. 364

EXAMEN SOBRE EL CAPÍTULO

1. Use el modelo lineal para ajustar los datos {(1, 2.06), (4, 6.39), (10 ,14.87)}. Grafique los datos y la recta.
2. Use un modelo exponencial para ajustar los datos {1, 1.09), (10 ,8.73), (16, 20.17)}. ¿Qué valor se puede predecir para $x = 20$? Grafique la curva.
3. ¿Qué modelo se debe usar para ajustar los datos {(1, 2), (2, 4) ,(3, 6), (5, 11)}?¿Por qué?

Apéndice A

Fórmulas

ÁLGEBRA

1. Fórmula cuadrática

Las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ son $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2. Determinantes

El valor de una determinante de dos por dos es $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$.

El valor de una determinante de tres por tres es

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2).$$

3. Números complejos

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$, con $w \neq 0$, entonces

$$z + w = (a + c) + (b + d)i,$$
$$z - w = (a - c) + (b - d)i,$$
$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$
$$\frac{z}{w} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i.$$

TRIGONOMETRÍA

4. Relación entre grados y radianes

Toda la circunferencia de un círculo subtiende un ángulo central de 2π radianes y de 360 grados.

$$2\pi \text{ radianes} = 1 \text{ revolución} = 360°$$

De este modo,

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}, \qquad \text{y} \qquad 1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}.$$

5. Definiciones e identidades fundamentales

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\csc\theta}; \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sec\theta}; \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\cot\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta};$$
$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1; \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta; \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta;$$
$$\operatorname{sen}\theta = \cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}(180° - \theta); \qquad \cos\theta = \operatorname{sen}(90° - \theta) = -\cos(180° - \theta);$$

$\tan\theta = \cot(90° - \theta) = -\tan(180° - \theta)$; $\cot\theta = \tan(90° - \theta) = -\cot(180° - \theta)$;

$\csc\theta = \cot\frac{\theta}{2} - \cot\theta$; $\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi$;

$\operatorname{sen}(\theta - \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi - \cos\theta\operatorname{sen}\phi$; $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$;

$\cos(\theta - \phi) = \cos\theta\cos\phi + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$; $\tan(\theta + \phi) = \dfrac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi}$;

$\tan(\theta - \phi) = \dfrac{\tan\theta - \tan\phi}{1 + \tan\theta\tan\phi}$; $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$;

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$; $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$;

$\cot 2\theta = \dfrac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}$; $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\theta}{2}}$; $\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\theta}{2}}$;

$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}} = \dfrac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta}$;

$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\phi = 2\operatorname{sen}\dfrac{\theta + \phi}{2}\cos\dfrac{\theta - \phi}{2}$; $\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\phi = 2\cos\dfrac{\theta + \phi}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\theta - \phi}{2}$;

$\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\dfrac{\theta + \phi}{2}\cos\dfrac{\theta - \phi}{2}$; $\cos\theta - \cos\phi = -2\operatorname{sen}\dfrac{\theta + \phi}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\theta - \phi}{2}$;

$\operatorname{sen}\theta\cos\phi = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\theta + \phi) + \operatorname{sen}(\theta - \phi)]$;

$\cos\theta\cos\phi = \frac{1}{2}[\cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi)]$;

$\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi = -\frac{1}{2}[\cos(\theta + \phi) - \cos(\theta - \phi)]$.

6. Ángulos y lados de triángulos

Ley de cosenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 4bc\cos A$.

Ley de los senos: $\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$.

Área $= {}^1/_2 bc \operatorname{sen} A = {}^1/_2 ac \operatorname{sen} B = {}^1/_2 ab \operatorname{sen} C$.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

7. Fórmulas básicas

Distancia entre dos puntos: $P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Punto medio: $P\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Pendiente de una recta: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. con $x_2 \neq x_1$.

Condición para rectas paralelas: $m_1 = m_2$.

Condición para rectas perpendiculares: $m_1m_2 = -1$.

Ángulo entre dos rectas: $\tan\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$.

Distancia entre un punto y una recta: $PQ = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

8. Ecuación de la recta

Ecuación general: $Ax + By + C = 0$.

Forma dos puntos: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

Forma punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Forma pendiente-ordenada al origen: $y = mx + b$.

Forma intersecciones: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

9. Circunferencia

Ecuación general: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Centro en el origen, radio r: $x^2 + y^2 = r^2$, o $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$.

Ecuación de la recta tangente en (x_1, y_1): $x_1x + y_1y = r^2$.

Centro en (h, k), radio r: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

10. Parábola

Vértice en el origen, se abre en la dirección x positiva:

$$y^2 = 4ax\ (a > 0), \qquad \text{o bien} \qquad x = at^2,\ y = 2at.$$

Ecuación de la recta tangente en (x_1, y_1): $y_1(y - y_1) = 2a(x - x_1)$

Foco: $(a, 0)$. Directriz: $x + a = 0$.

Vértice en (h, k), se abre en la dirección x positiva: $(y - k)^2 = 4a(x - h)$.

11. Elipse

Centro en el origen: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, o $x = a\cos\theta$, $y = b\,\text{sen}\,\theta$.

Ecuación de la recta tangente en (x_1, y_1): $\dfrac{x_1x}{a^2} + \dfrac{y_1y}{b^2} = 1$.

Si $a > b$: $c^2 = a^2 - b^2$; excentricidad $e = c/a$; *focos*, $(-c, 0)$,$(c, 0)$

Si $b > a$: $c^2 = b^2 - a^2$; excentricidad $e = c/b$; focos, $(0, -c)$, $(0, c)$.

Centro en (h, k): $\dfrac{(x - h)^2}{a^2} + \dfrac{(y - k)^2}{b^2} = 1$.

12. Hipérbola

Centro en el origen: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, o $x = a\sec\theta$, $y = b\tan\theta$.

Ecuación de la recta tangente en (x_1, y_1): $\dfrac{x_1 x}{a^2} - \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1$.

Asíntotas: $y = \dfrac{b}{a}x$, $y = -\dfrac{b}{a}x$.

Focos: $(-c, 0)$, $(c, 0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$.

Excentricidad: $e = c/a$, donde $c^2 = a^2 + b^2$.

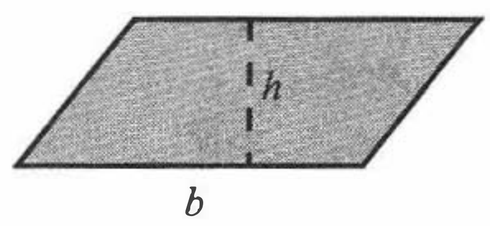
Centro en (h, k): $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = \pm 1$.

Con asíntotas $x = a$, $y = b$: $(x - a)(y - b) = k$.

GEOMETRÍA PLANA

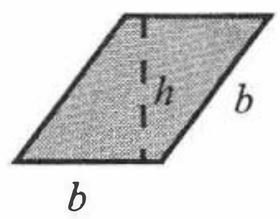
12. Figuras básicas y sus áreas

Paralelogramo



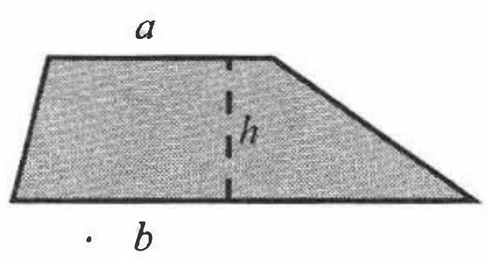
Área = bh

Rombo



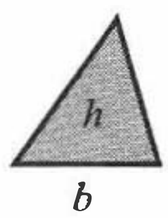
Área = bh

Trapecio



Área= $\frac{1}{2}(a + b)h$

Triángulo



Área = $\frac{1}{2}bh$

Apéndice B

Tablas

TABLA I Funciones trigonométricas naturales

Ángulo		Seno	Coseno	Tangente	Ángulo		Seno	Coseno	Tangente
Grado	Radián				Grado	Radián			
0°	0.000	0.000	1.000	0.000					
1°	0.017	0.017	1.000	0.017	46°	0.803	0.719	0.695	1.036
2°	0.035	0.035	0.999	0.035	47°	0.820	0.731	0.682	1.072
3°	0.052	0.052	0.999	0.052	48°	0.838	0.743	0.669	1.111
4°	0.070	0.070	0.998	0.070	49°	0.855	0.755	0.656	1.150
5°	0.087	0.087	0.996	0.087	50°	0.873	0.766	0.643	1.192
6°	0.105	0.105	0.995	0.105	51°	0.890	0.777	0.629	1.235
7°	0.122	0.122	0.993	0.123	52°	0.908	0.788	0.616	1.280
8°	0.140	0.139	0.990	0.141	53°	0.925	0.799	0.602	1.327
9°	0.157	0.156	0.988	0.158	54°	0.942	0.809	0.588	1.376
10°	0.175	0.174	0.985	0.176	55°	0.960	0.819	0.574	1.428
11°	0.192	0.191	0.982	0.194	56°	0.977	0.829	0.559	1.483
12°	0.209	0.208	0.978	0.213	57°	0.995	0.839	0.545	1.540
13°	0.227	0.225	0.974	0.231	58°	1.012	0.848	0.530	1.600
14°	0.244	0.242	0.970	0.249	59°	1.030	0.857	0.515	1.664
15°	0.262	0.259	0.966	0.268	60°	1.047	0.866	0.500	1.732
16°	0.279	0.276	0.961	0.287	61°	1.065	0.875	0.485	1.804
17°	0.297	0.292	0.956	0.306	62°	1.082	0.883	0.469	1.881
18°	0.314	0.309	0.951	0.325	63°	1.100	0.891	0.454	1.963
19°	0.332	0.326	0.946	0.344	64°	1.117	0.899	0.438	2.050
20°	0.349	0.342	0.940	0.364	65°	1.134	0.906	0.423	2.145
21°	0.367	0.358	0.934	0.384	66°	1.152	0.914	0.407	2.246
22°	0.384	0.375	0.927	0.404	67°	1.169	0.921	0.391	2.356
23°	0.401	0.391	0.921	0.424	68°	1.187	0.927	0.375	2.475
24°	0.419	0.407	0.914	0.445	69°	1.204	0.934	0.358	2.605
25°	0.436	0.423	0.906	0.466	70°	1.222	0.940	0.342	2.748
26°	0.454	0.438	0.899	0.488	71°	1.239	0.946	0.326	2.904
27°	0.471	0.454	0.891	0.510	72°	1.257	0.951	0.309	3.078
28°	0.489	0.469	0.883	0.532	73°	1.274	0.956	0.292	3.271
29°	0.506	0.485	0.875	0.554	74°	1.292	0.961	0.276	3.487
30°	0.524	0.500	0.866	0.577	75°	1.309	0.966	0.259	3.732
31°	0.541	0.515	0.857	0.601	76°	1.326	0.970	0.242	4.011
32°	0.559	0.530	0.848	0.625	77°	1.344	0.974	0.225	4.332
33°	0.576	0.545	0.839	0.649	78°	1.361	0.978	0.208	4.705
34°	0.593	0.559	0.829	0.675	79°	1.379	0.982	0.191	5.145
35°	0.611	0.574	0.819	0.700	80°	1.396	0.985	0.174	5.671
36°	0.628	0.588	0.809	0.727	81°	1.414	0.988	0.156	6.314
37°	0.646	0.602	0.799	0.754	82°	1.431	0.990	0.139	7.115
38°	0.663	0.616	0.788	0.781	83°	1.449	0.993	0.122	8.144
39°	0.681	0.629	0.777	0.810	84°	1.466	0.995	0.105	9.514
40°	0.698	0.643	0.766	0.839	85°	1.484	0.996	0.087	11.43
41°	0.716	0.656	0.755	0.869	86°	1.501	0.998	0.070	14.30
42°	0.733	0.669	0.743	0.900	87°	1.518	0.999	0.052	19.08
43°	0.750	0.682	0.731	0.933	88°	1.536	0.999	0.035	28.64
44°	0.768	0.695	0.719	0.966	89°	1.553	1.000	0.017	57.29
45°	0.785	0.707	0.707	1.000	90°	1.571	1.000	0.000	

TABLA II Funciones exponenciales

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.0000	2.5	12.182	0.0821
0.05	1.0513	0.9512	2.6	13.464	0.0743
0.10	1.1052	0.9048	2.7	14.880	0.0672
0.15	1.1618	0.8607	2.8	16.445	0.0608
0.20	1.2214	0.8187	2.9	18.174	0.0550
0.25	1.2840	0.7788	3.0	20.086	0.0498
0.30	1.3499	0.7408	3.1	22.198	0.0450
0.35	1.4191	0.7047	3.2	24.533	0.0408
0.40	1.4918	0.6703	3.3	27.113	0.0369
0.45	1.5683	0.6376	3.4	29.964	0.0334
0.50	1.6487	0.6065	3.5	33.115	0.0302
0.55	1.7333	0.5769	3.6	36.598	0.0273
0.60	1.8221	0.5488	3.7	40.447	0.0247
0.65	1.9155	0.5220	3.8	44.701	0.0224
0.70	2.0138	0.4966	3.9	49.402	0.0202
0.75	2.1170	0.4724	4.0	54.598	0.0183
0.80	2.2255	0.4493	4.1	60.340	0.0166
0.85	2.3396	0.4274	4.2	66.686	0.0150
0.90	2.4596	0.4066	4.3	73.700	0.0136
0.95	2.5857	0.3867	4.4	81.451	0.0123
1.0	2.7183	0.3679	4.5	90.017	0.0111
1.1	3.0042	0.3329	4.6	99.484	0.0101
1.2	3.3201	0.3012	4.7	109.95	0.0091
1.3	3.6693	0.2725	4.8	121.51	0.0082
1.4	4.0552	0.2466	4.9	134.29	0.0074
1.5	4.4817	0.2231	5	148.41	0.0067
1.6	4.9530	0.2019	6	403.43	0.0025
1.7	5.4739	0.1827	7	1096.6	0.0009
1.8	6.0496	0.1653	8	2981.0	0.0003
1.9	6.6859	0.1496	9	8103.1	0.0001
2.0	7.3891	0.1353	10	22026	0.00005
2.1	8.1662	0.1225			
2.2	9.0250	0.1108			
2.3	9.9742	0.1003			
2.4	11.023	0.0907			

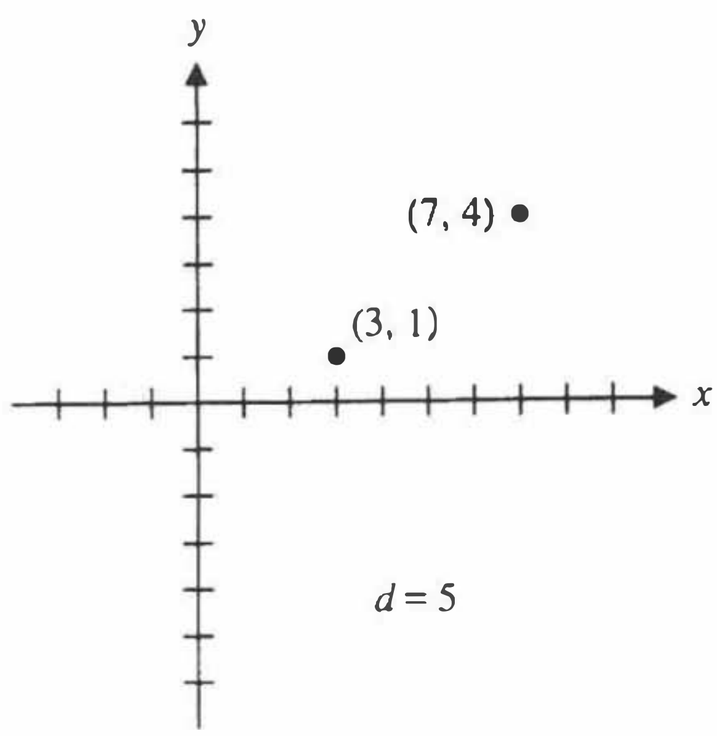
Respuestas a Ejercicios Seleccionados

CAPÍTULO 1

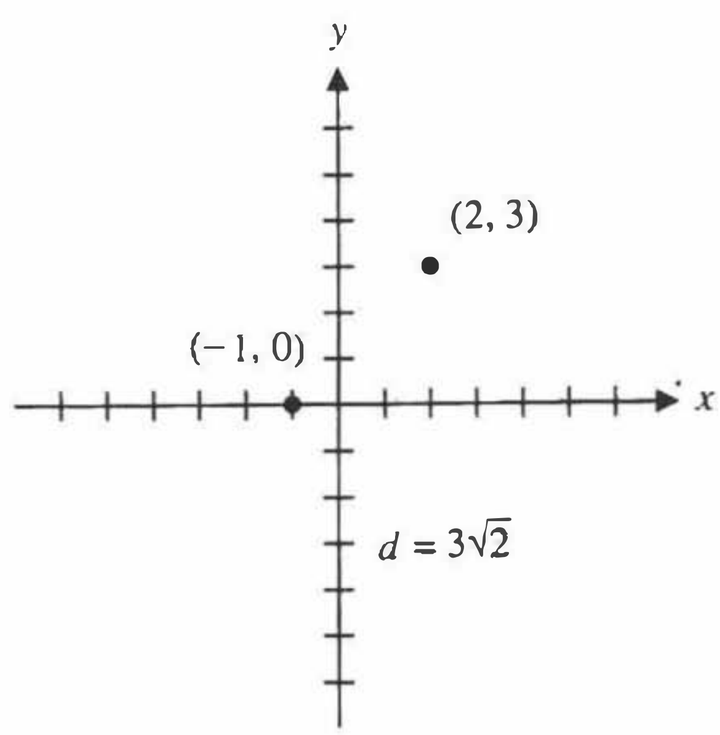
Ejercicios, Sección 1.1; páginas 10–12

2. $A = (-3, 1)$, $B = (0, 4)$, y $C = (2, -1)$.
$|AB| = 3\sqrt{2}$, $|BC| = \sqrt{29}$, y $|AC| = \sqrt{29}$.

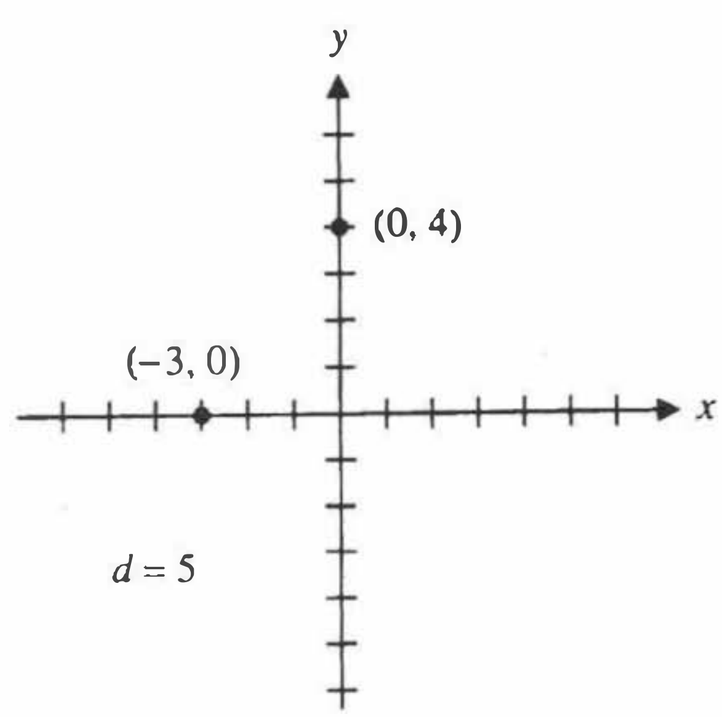
4.



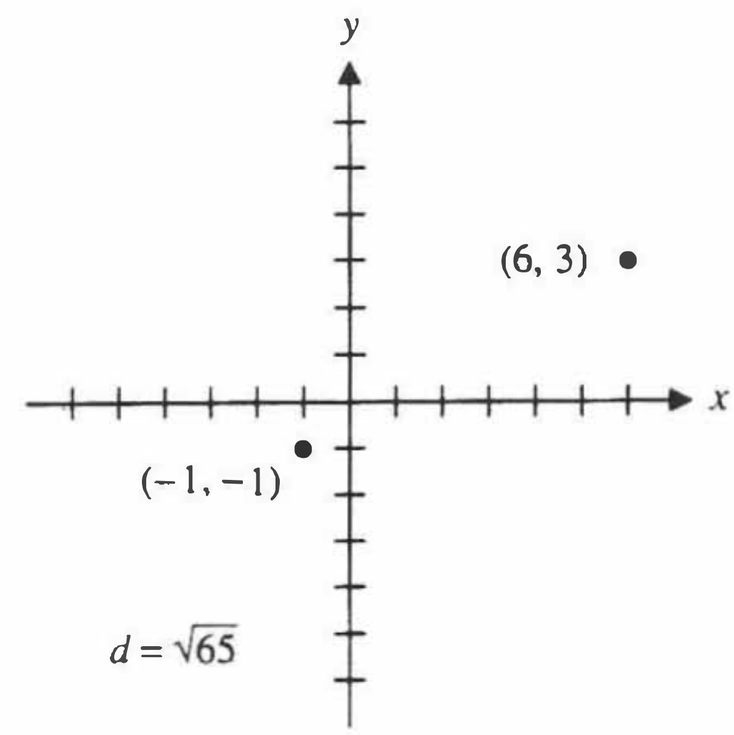
6.



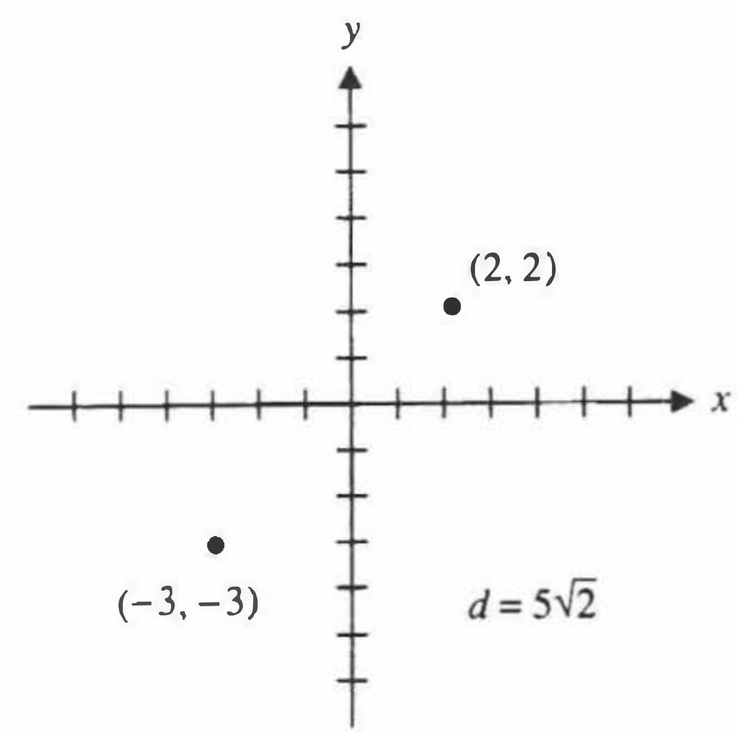
8.



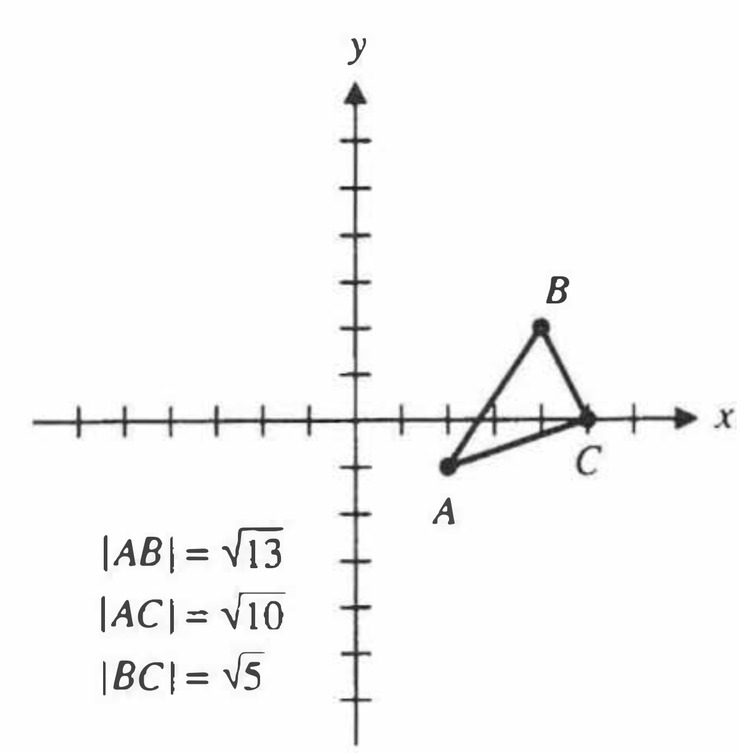
10.



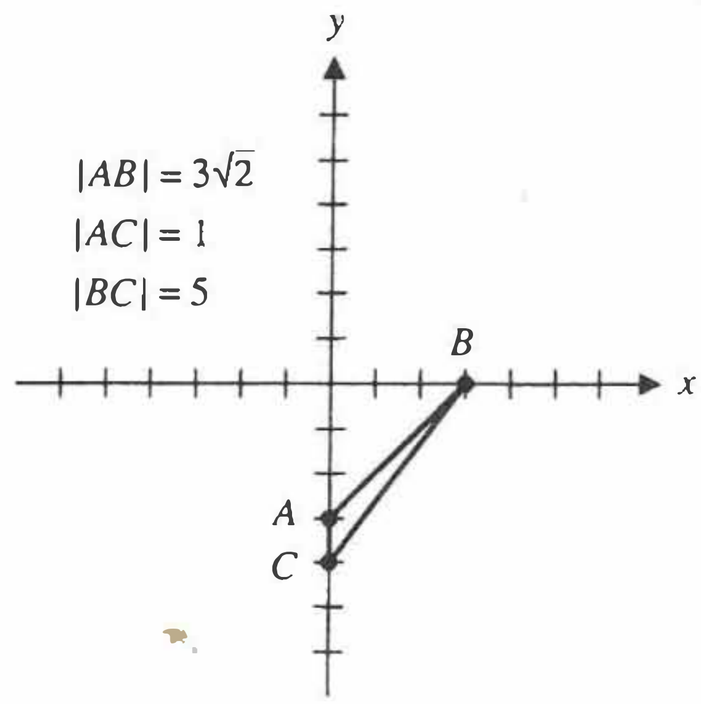
12.



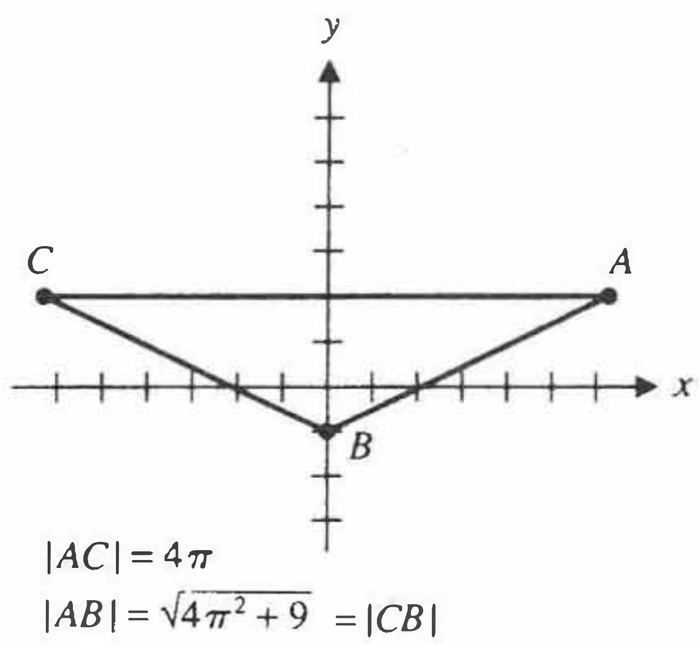
14.



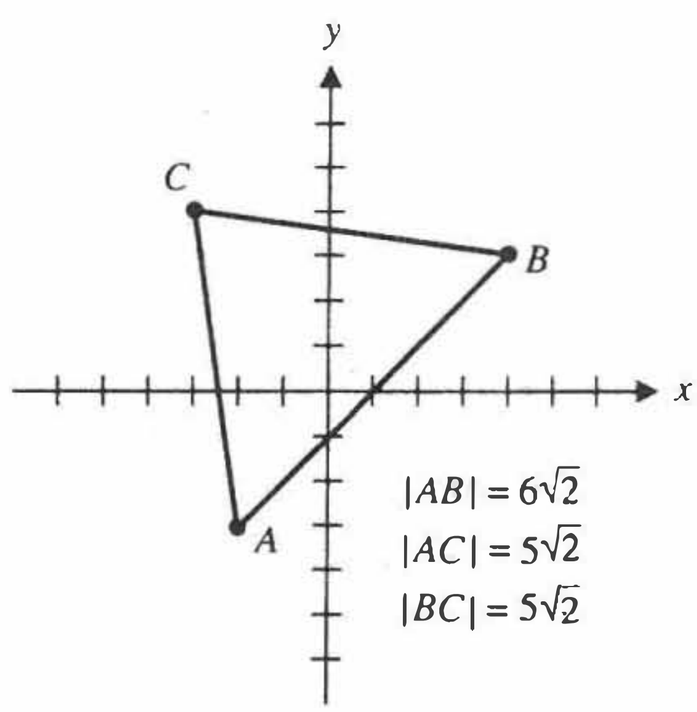
16.



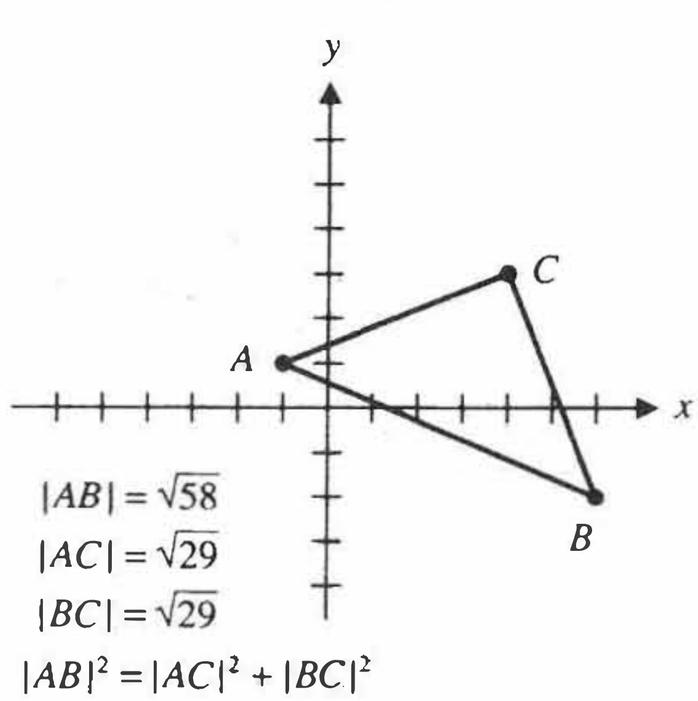
18.



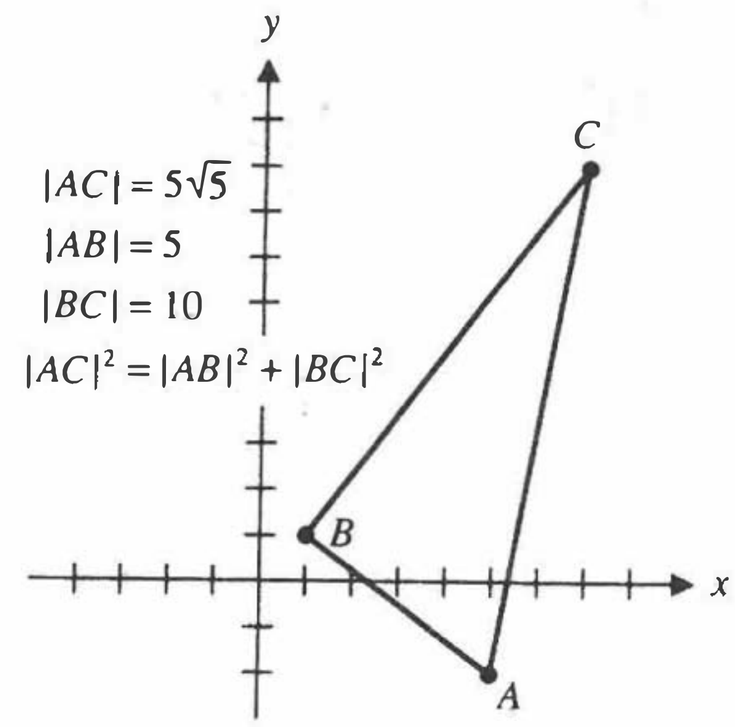
20.



22.



24.



26. $|AB| = |AC| = |BC| = 6$.

28. Todas las distancias son 5.

30. Alineados

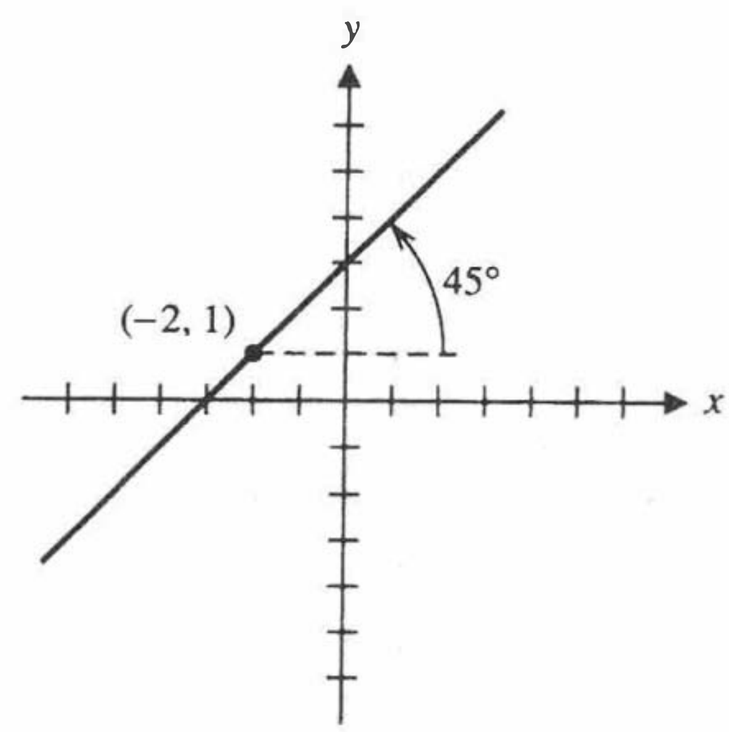
32. No alineados

34. $x = 13$

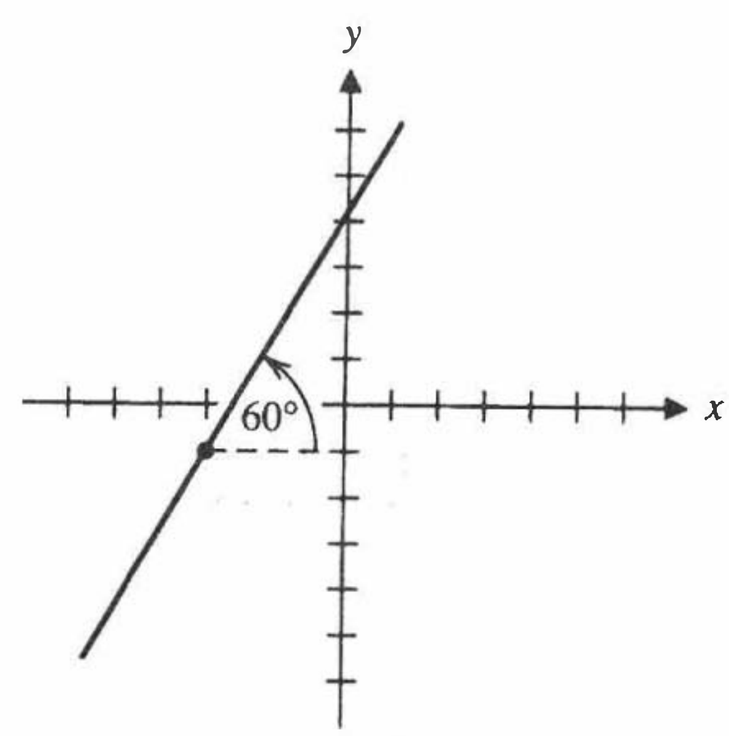
36. $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$

Ejercicios, Sección 1.2; páginas 20–22

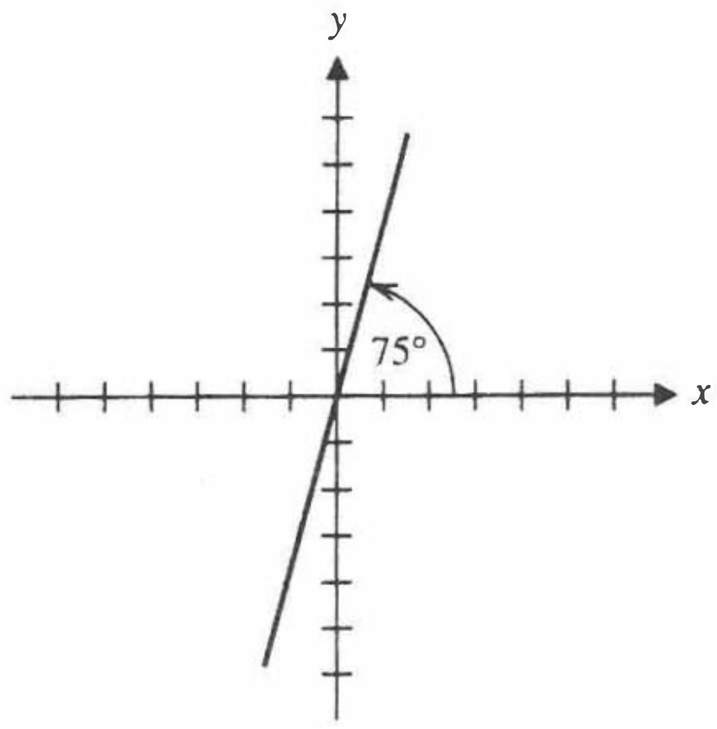
2.



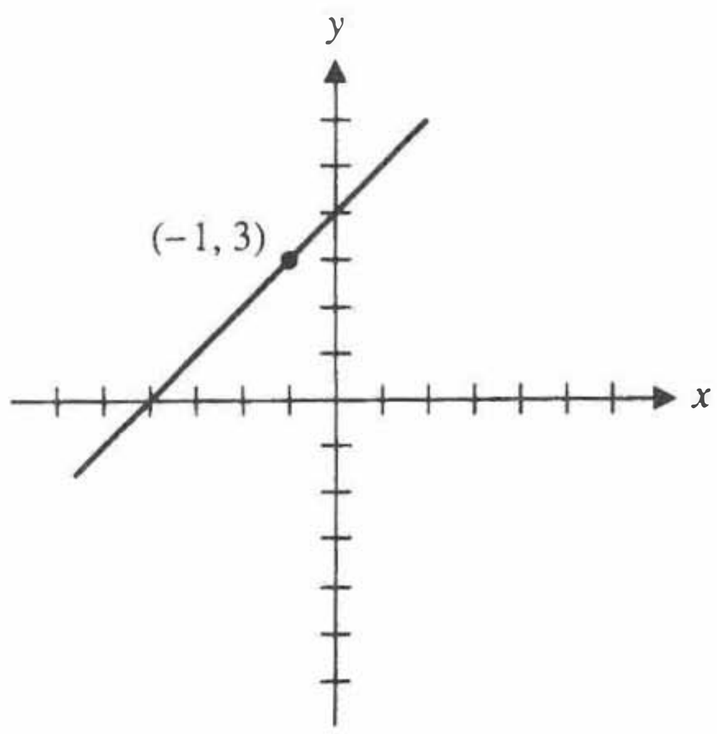
4.



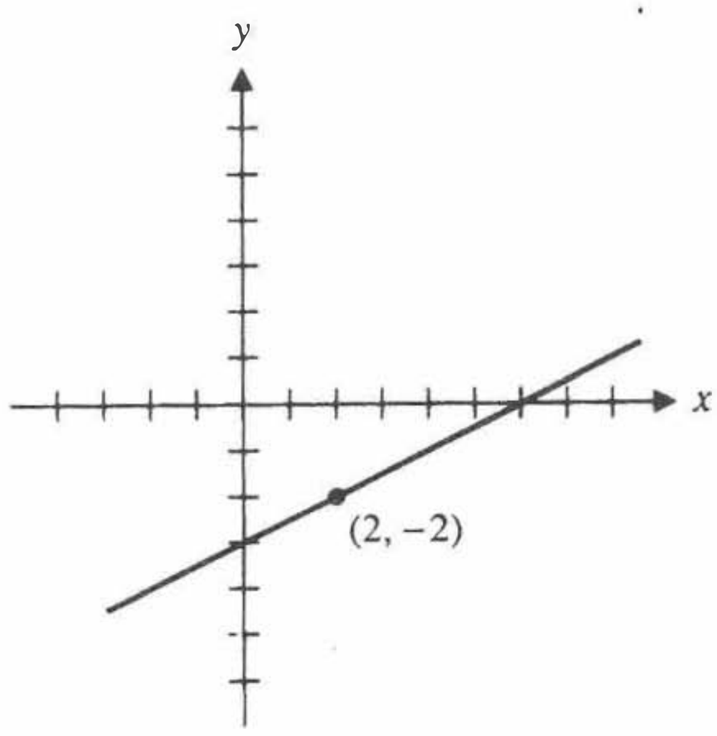
6.



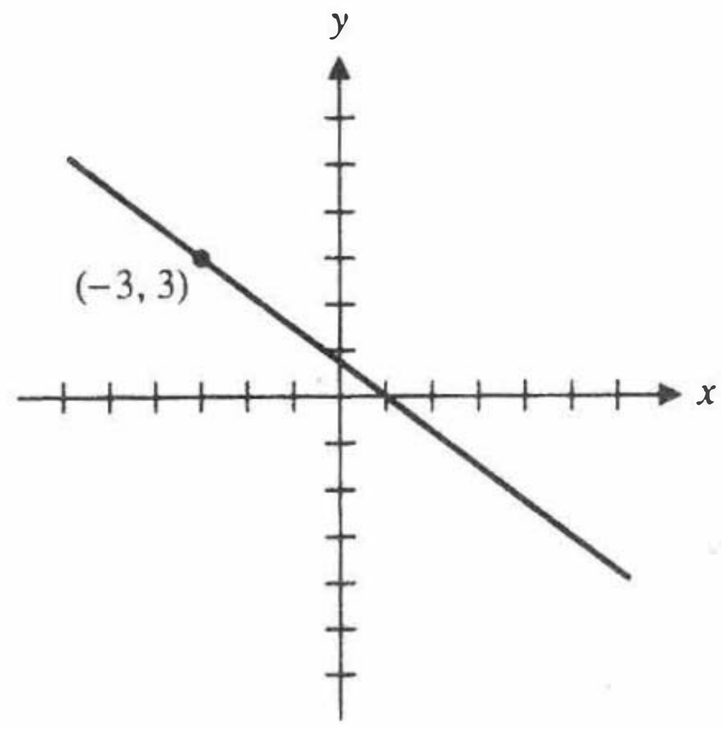
8.



10.



12.



14. $\frac{4}{3}$, Sí, No

16. 4, 76°

18. 15, 86°

20. 9.43912, 24°

22. Pendiente AB = Pendiente CD = 0.
Pendiente BC = Pendiente DA = $-\frac{3}{2}$.
además, $|AD| = |BC|$ y $|DC| = |AB|$.
Luego, la figura ABCD es un paralelogramo.

24. Pendiente AB = Pendiente CD = −1.
Análogamente Pendiente BC = Pendiente AD = $\frac{5}{8}$.

26. La pendiente de la línea que pasa por (0, 0) y (4, 4) es 1. La pendiente de la línea que pasa por (0, 0) y (4, −4) es −1.

28. La pendiente de la línea que pasa por (0, −2) y (5, −4) es $-\frac{2}{5}$. La pendiente de la línea que pasa por (7, 1) y (5, −4) es $\frac{5}{2}$.

30. La pendiente de la línea que pasa por (1, 1) y (4, −1) es $-\frac{2}{3}$. La pendiente de la línea que pasa por (1, 1) y (3, 4) es $\frac{3}{2}$.

32. La pendiente de AB es $-\frac{5}{4}$. La pendiente de BC es $\frac{4}{5}$. La pendiente de CD es $-\frac{5}{4}$. La pendiente de DA es $\frac{4}{5}$. Así A, B, C y D son los vértices de un rectángulo.

36. Están alineados.

38. No están sobre una recta.

40. $\tan A = \frac{7}{6}$, $A = 49°$; $\tan B = \frac{14}{5}$, $B = 70°$;
$\tan C = \frac{7}{4}$, $C = 60°$

42. $\tan A = -18$, $A = 93°$; $\tan B = \frac{9}{8}$, $B = 48°$;
$\tan C = \frac{27}{34}$, $C = 38°$

44. 27°, 153° 46. 34°

48. Perpendicular

50. Perpendiculares 52. Oblicuas

54. 109°

Ejercicios, sección 1.3; páginas 28–30

2. (2, 4) 4. (−1, 1)

6. (1, 5) 8. $\left(3, \frac{7}{2}\right), \left(\frac{7}{2}, 2\right), \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$

10. $\left(-2, -\frac{11}{2}\right), \left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, -4\right)$

12. El punto medio es $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$. La distancia es $\sqrt{34}/2$.

14. $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 16. $\left(3, \frac{8}{5}\right)$ 18. (15, 6)

20. (2.4174, 0.8315)

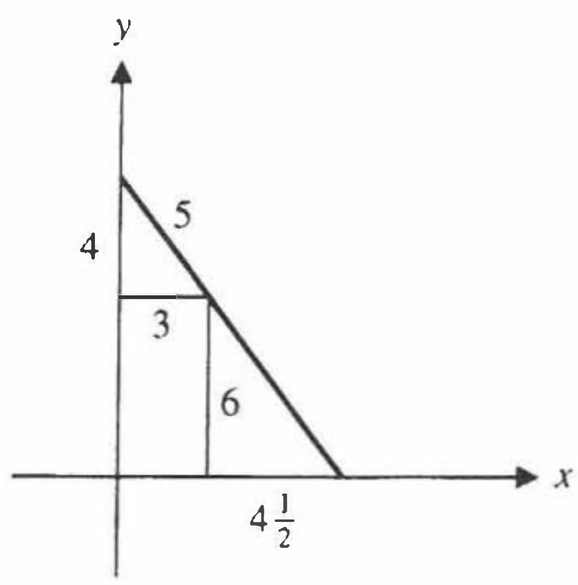
22. $\left(5, \frac{17}{5}\right)$ 24. $\left(\frac{17}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ 26. $\left(\frac{26}{7}, -\frac{11}{7}\right)$

28. a) (8, 11), b) (−1, −1)

30. a) (9, 9), $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$ b) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right)$

32. $\left(6, \frac{3}{2}\right)$ 34. $\left(5, -\frac{3}{2}\right)$ 36. $\left(\frac{33}{4}, \frac{11}{2}\right)$

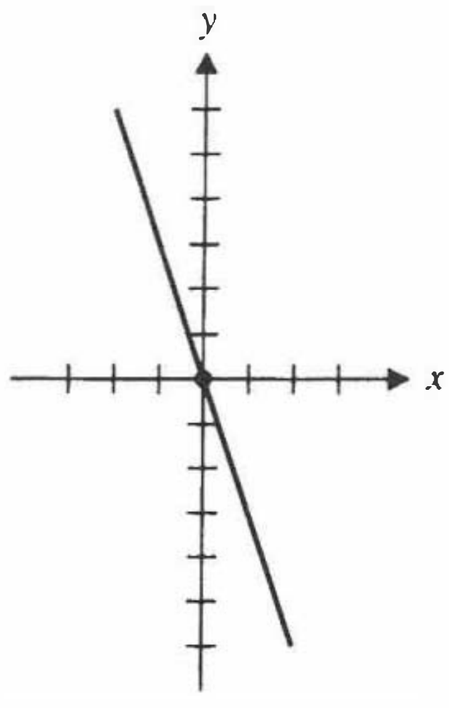
38. 10′, 3′, $4\frac{1}{2}$′



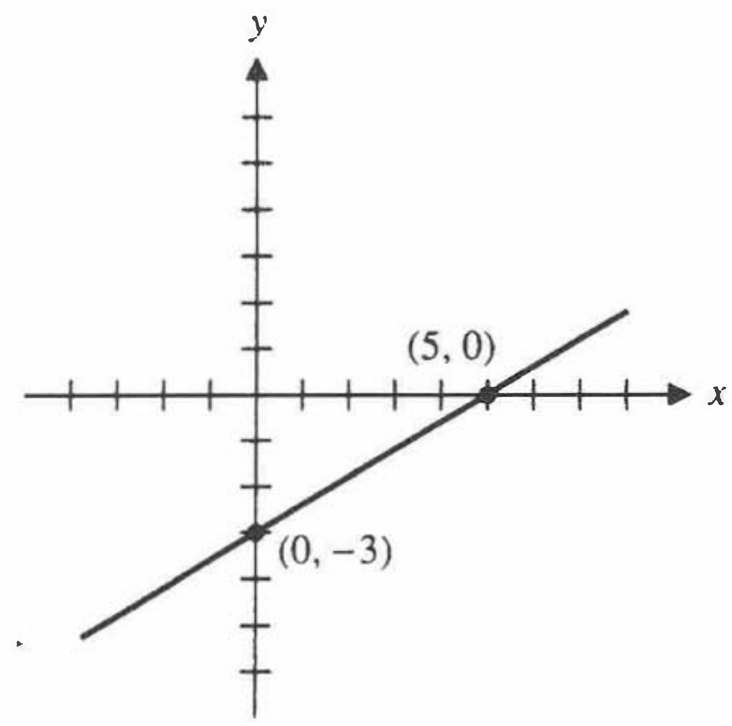
Ejercicios, sección 1.5; páginas 41–44

2. No, pues (1,2) y (1,1) están, ambas, en la relación.

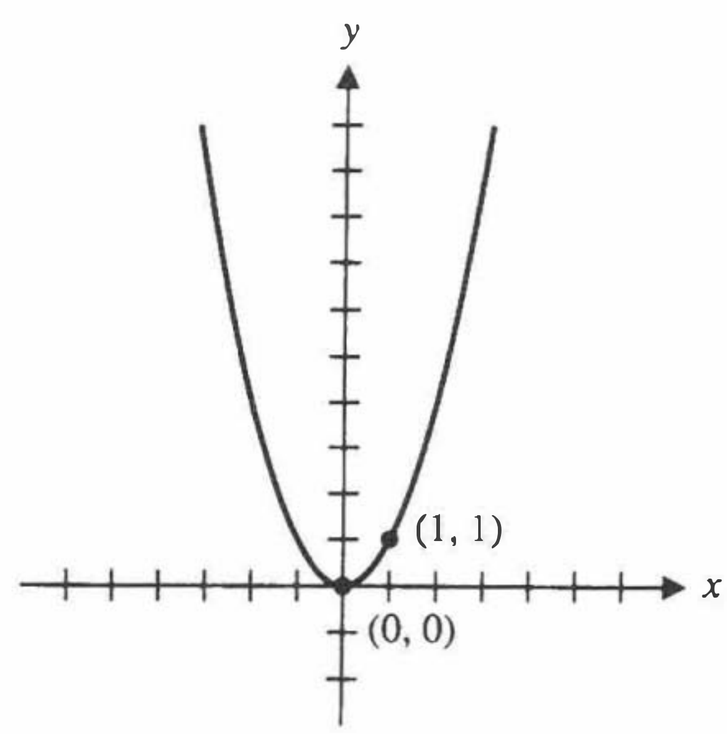
4. Una función.



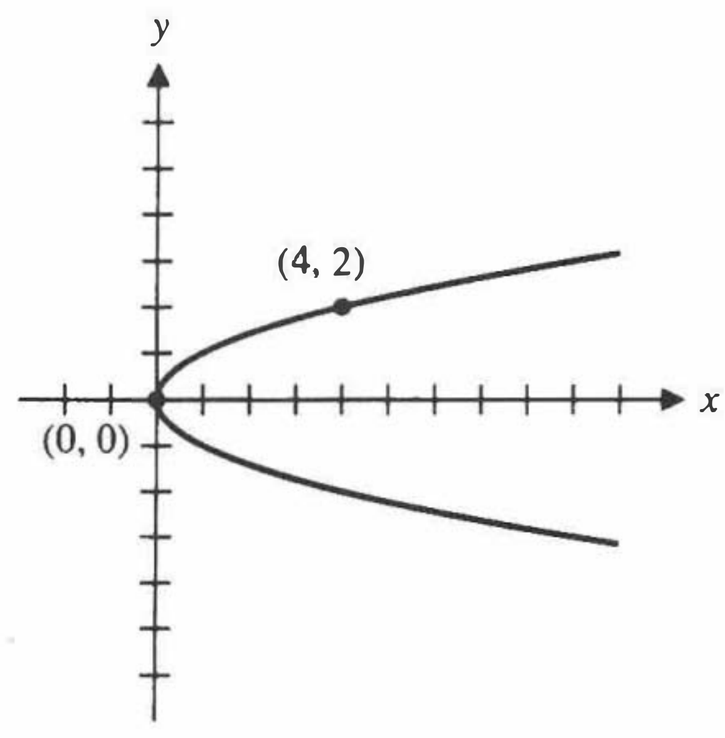
6. Una función



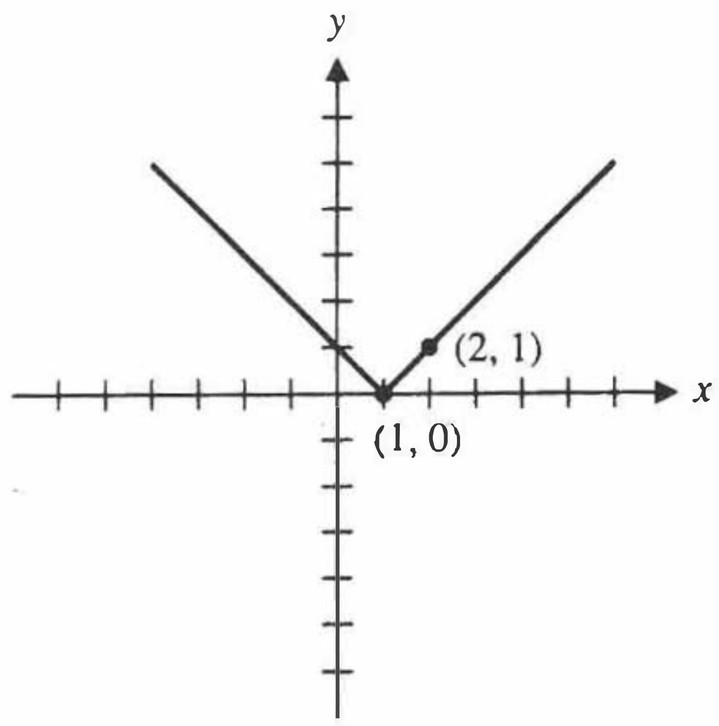
8. $y = x^2$ es una función.



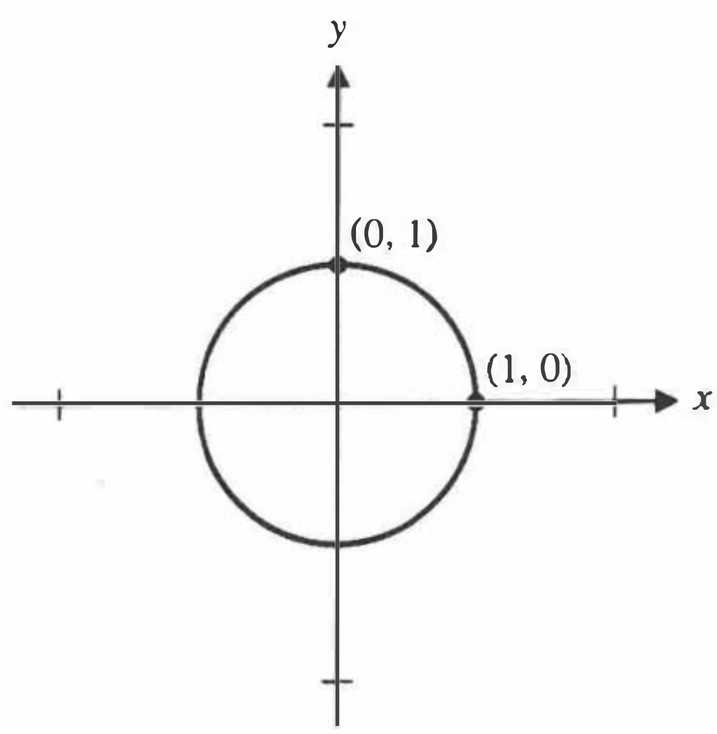
10. $x = y^2$ *no* es una función.



12. Una función



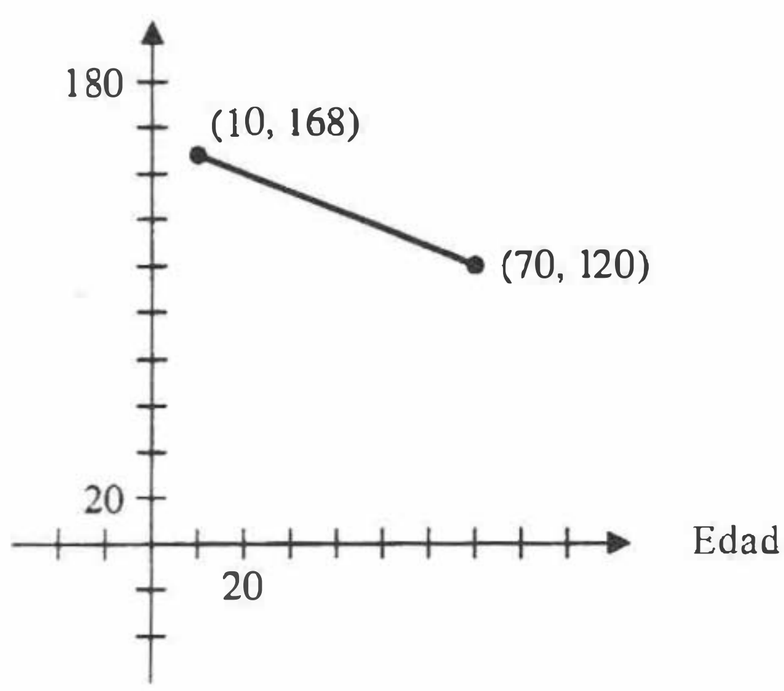
14. $x^2 + y^2 = 1$ no es una función.



16. a) no es una función b) es una función
c) es una función; d) no es una función.

18. $f(-1) = 2$; $f(1 + h) = 2 + 2h + h^2$; $f(1 - h) = 2 - 2h + h^2$; $f(0) = 1$; no

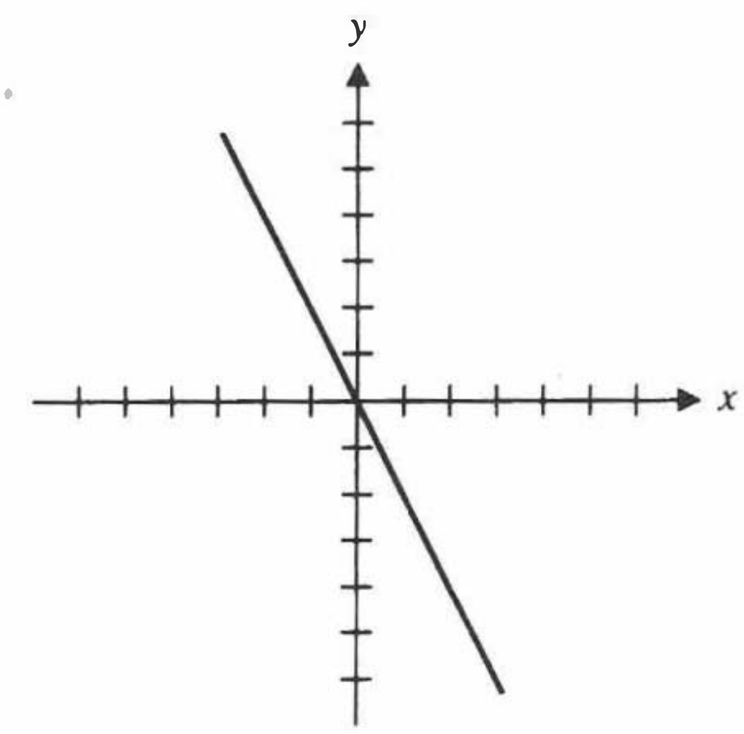
20.



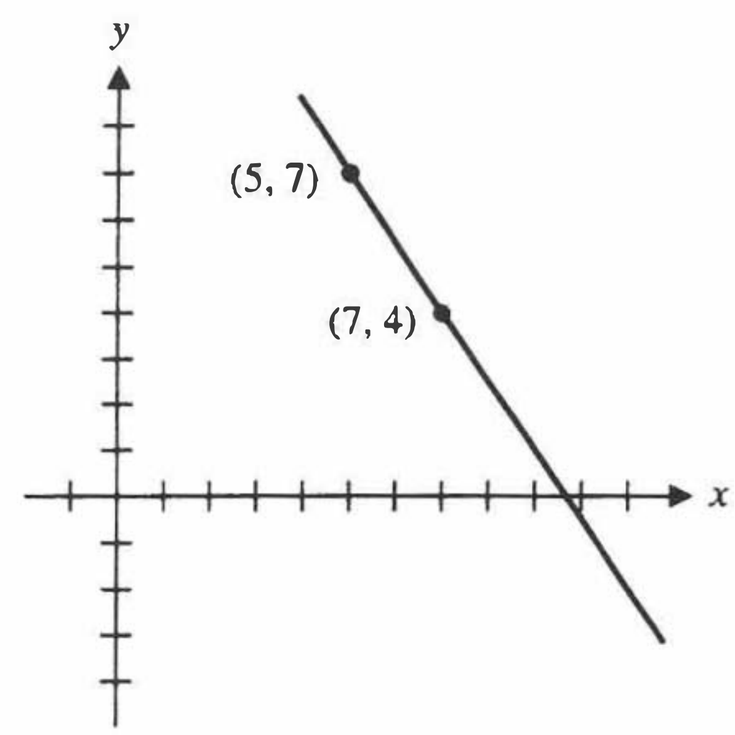
22. a) par b) impar
c) ni par, ni impar d) impar

Ejercicios, sección 1.6; páginas 49–50

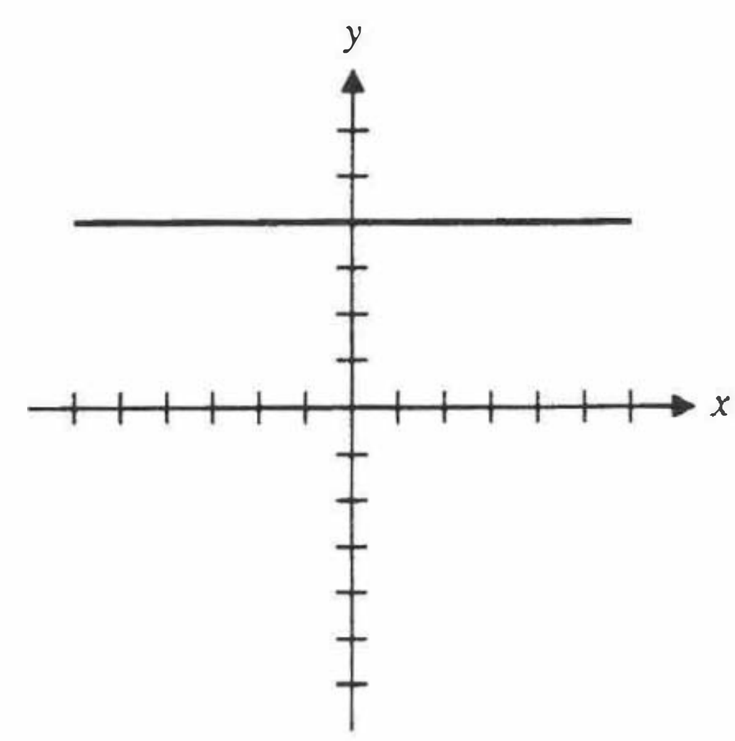
2. $y = -2x$



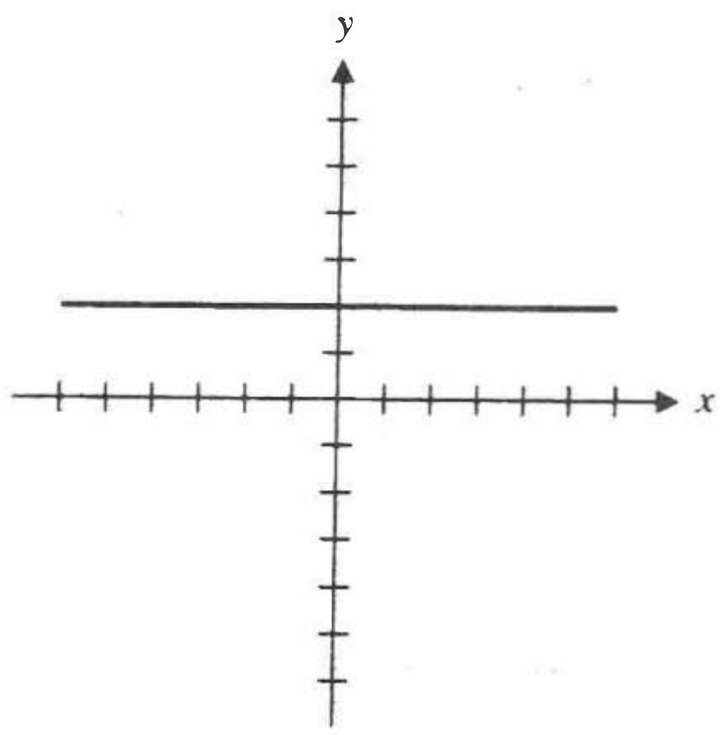
4. $2y + 3x = 29$



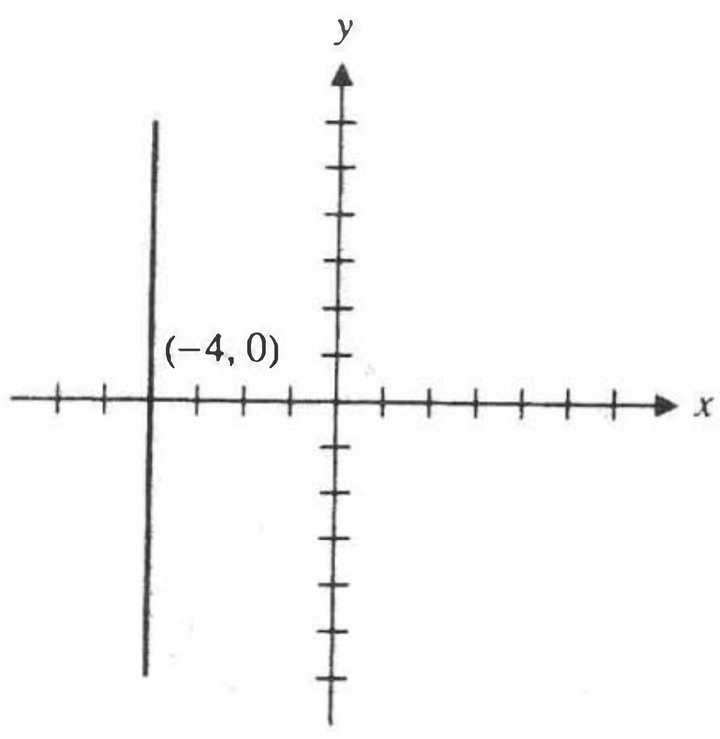
6. $y = 4$



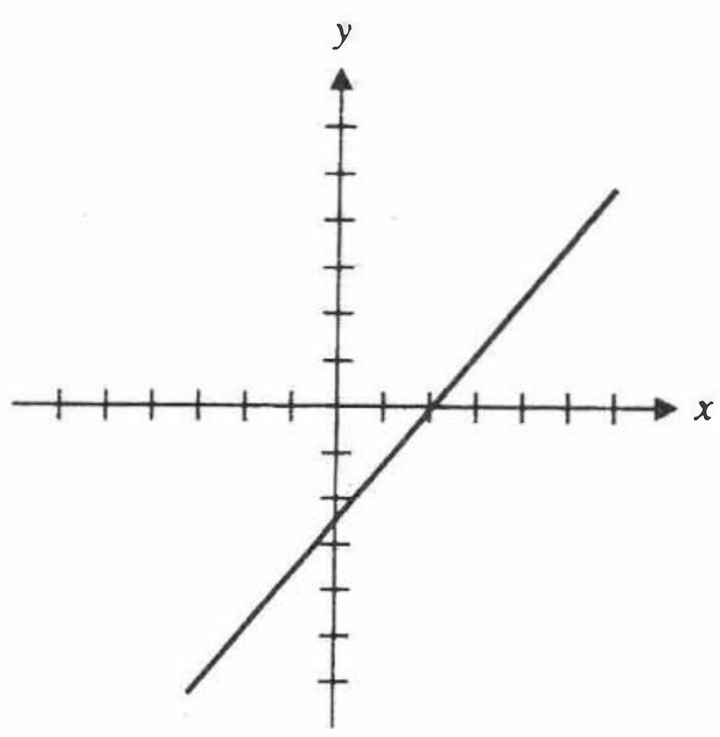
8. $y = 2$



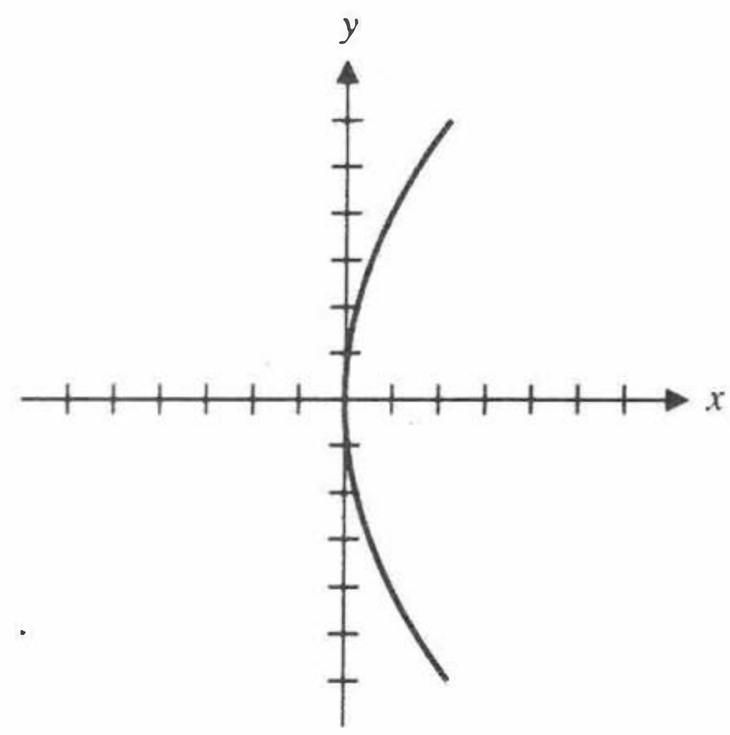
10. $x = -4$



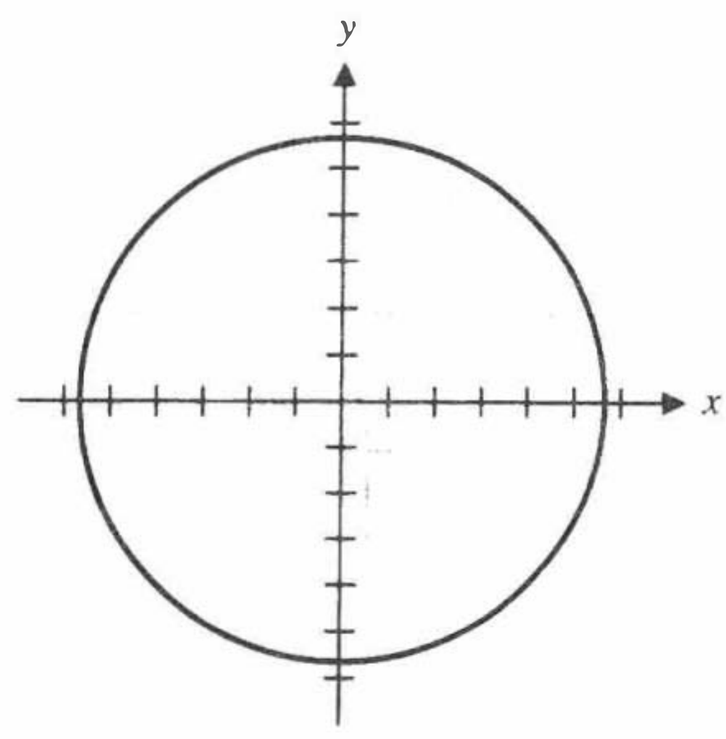
12. $12x - 10y = 25$



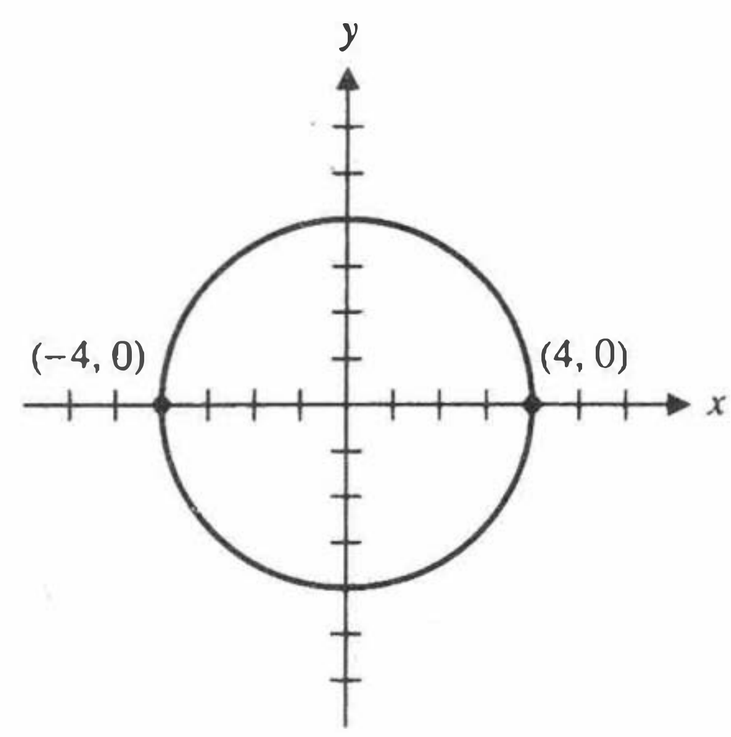
14. $16x = y^2$



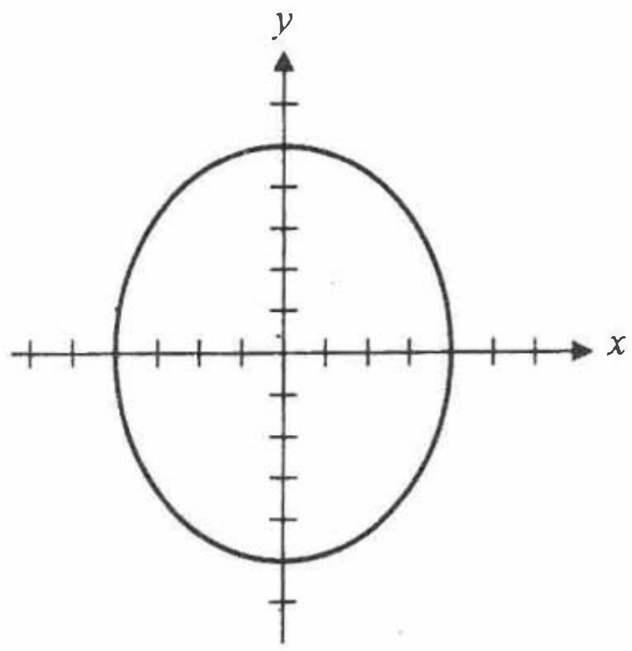
16. $x^2 + y^2 = 32$



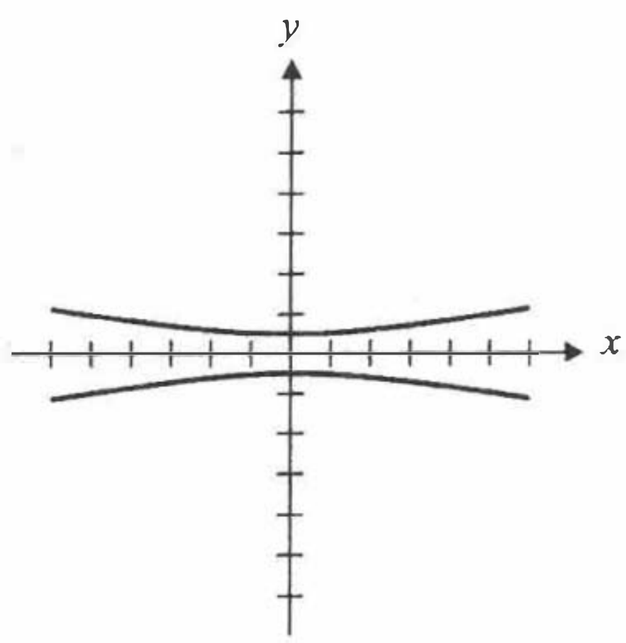
18. $x^2 + y^2 = 16$



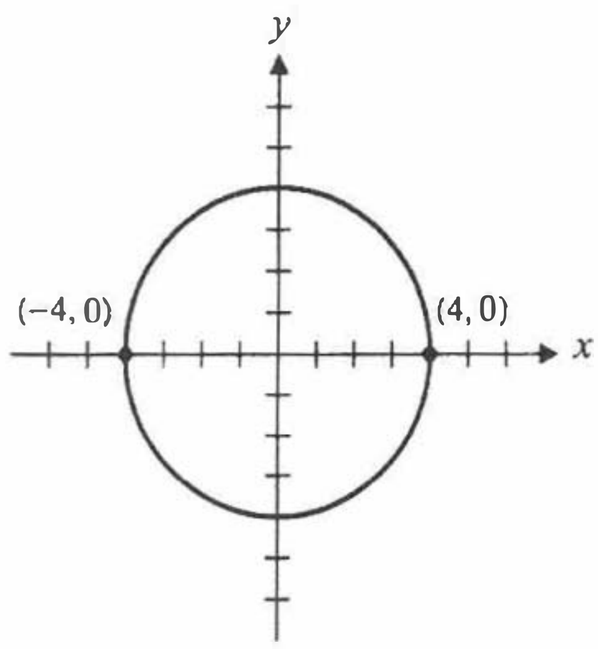
20. $25x^2 + 16y^2 = 400$



22. $4x^2 - 140y^2 + 35 = 0$



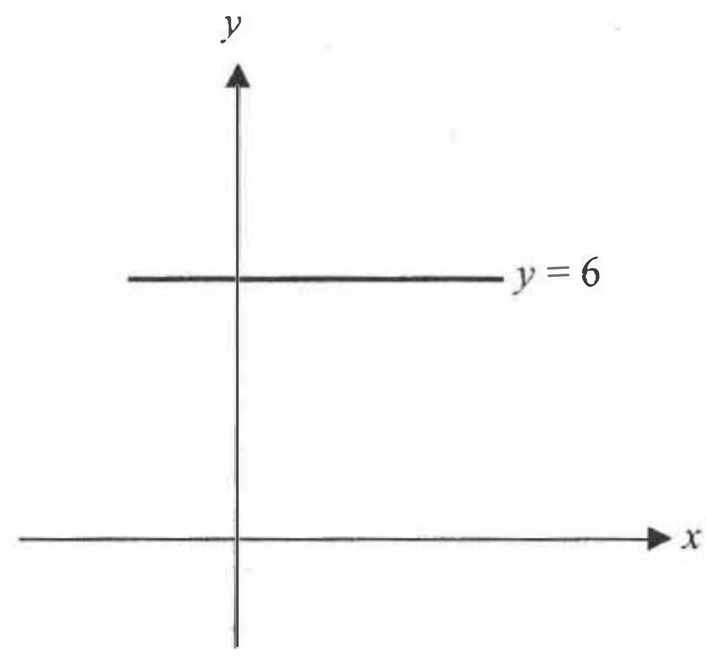
24. $x^2 + y^2 = 16$



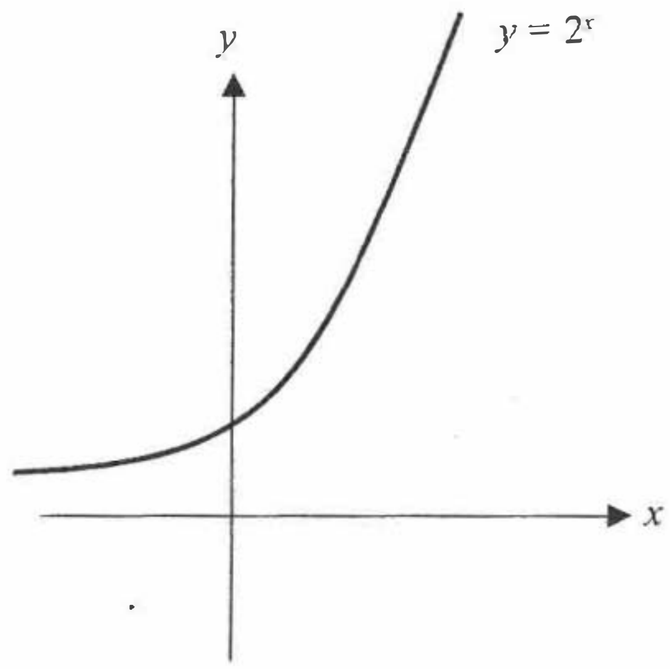
26. El número esperado de nuevos casos es de 66 y 79.

Ejercicios, Sección 1.7; página 59

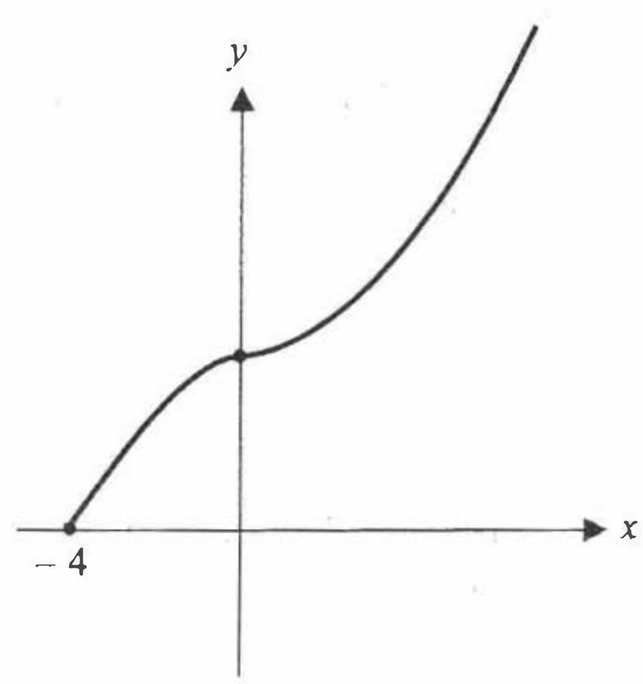
2. Dom $f = \mathbb{R}$
   Cod $f = (6)$



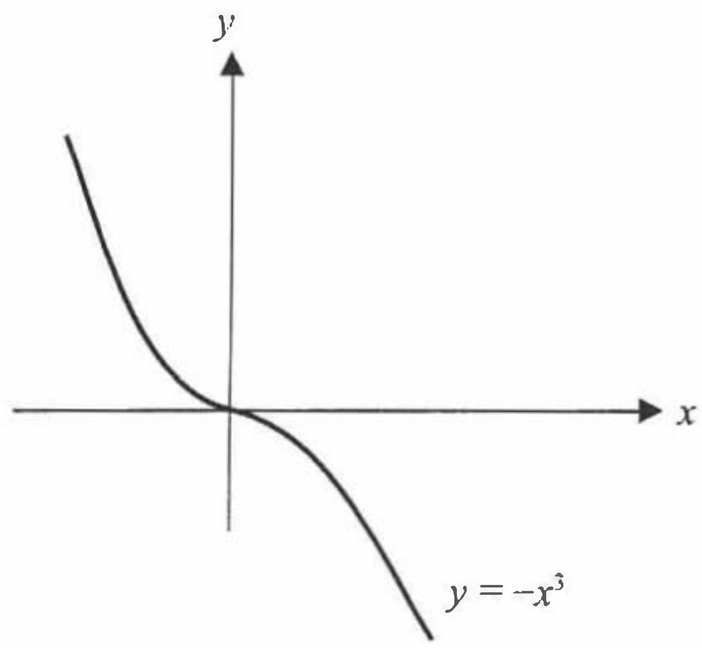
4. Dom $f = \mathbb{R}$
   Cod $f = \mathbb{R}^+$



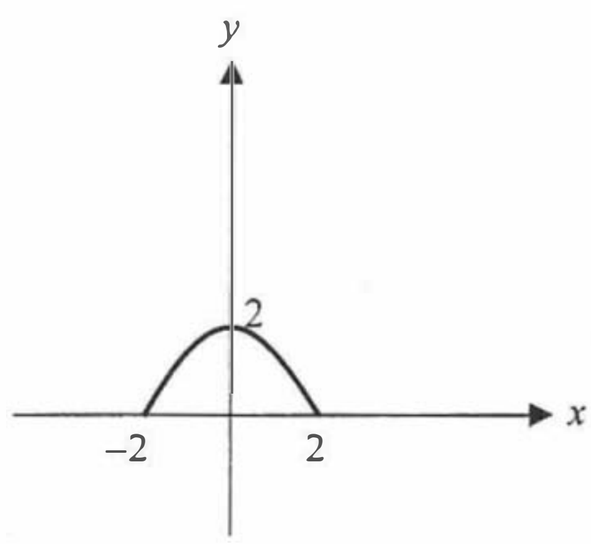
6. Dom $f = [-4, \infty)$
   Cod $f = [0, \infty)$



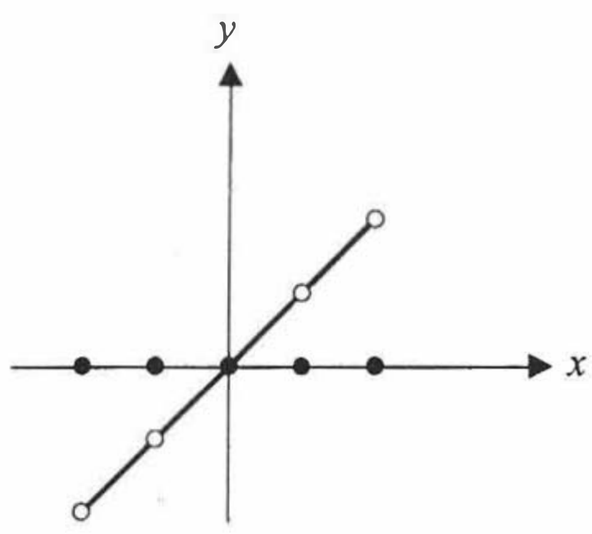
8. Dom $f = \mathbb{R}$
   Cod $f = \mathbb{R}$



10. Dom $f = [-2, 2]$
    Cod $f = [0, 2]$



12.



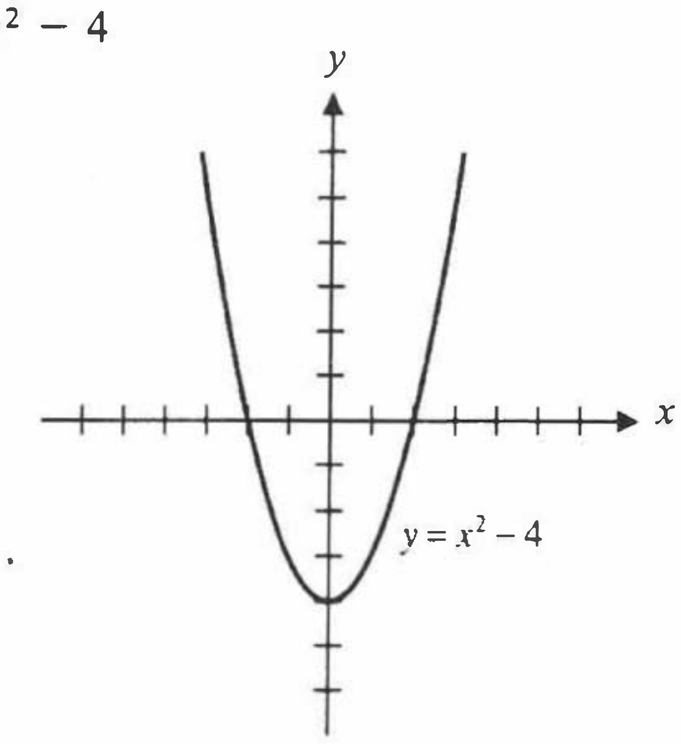
14. a) $f(0) = 1$; b) $f(\frac{1}{2}) = 0$;
    c) $f(a + h) = -4(a + h)^2 + 1$, d) $-8a - 4h$.

Ejercicios de repaso; páginas 59–60

4. $\tan A = 5$, $A = 79°$; $\tan B = 8$, $B = 83°$; $\tan C = \frac{1}{3}$, $C = 18°$

6. $\left(-2, \frac{4}{3}\right)$, $(-10, 8)$

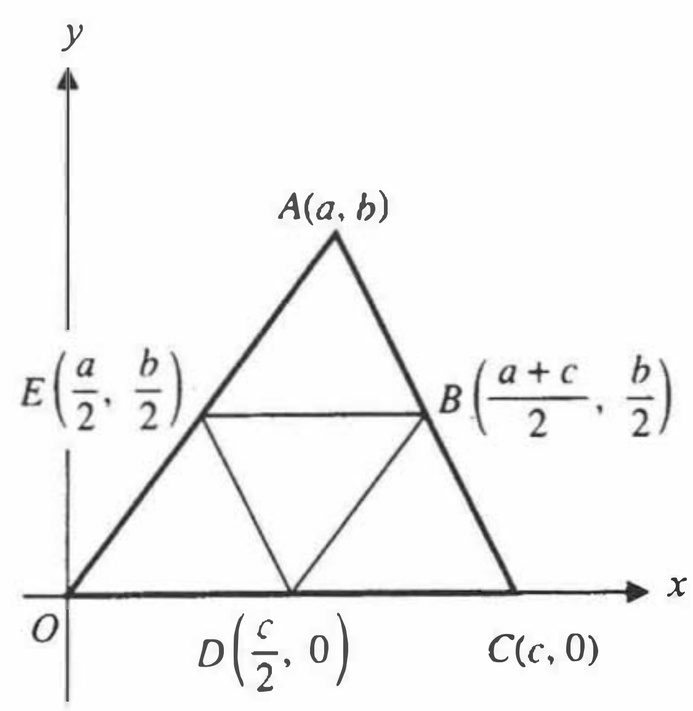
8. $y = x^2 - 4$



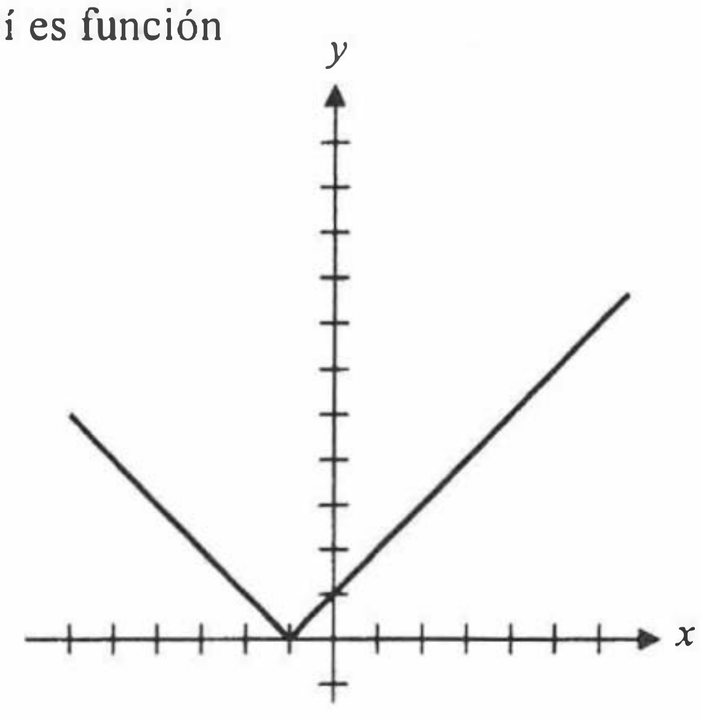
Examen sobre el capítulo; página 60

2. a) $|AB| = \sqrt{58}$ b) $\frac{7}{3}$ c) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2},\right)$ d) 1.4°
   e) $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$

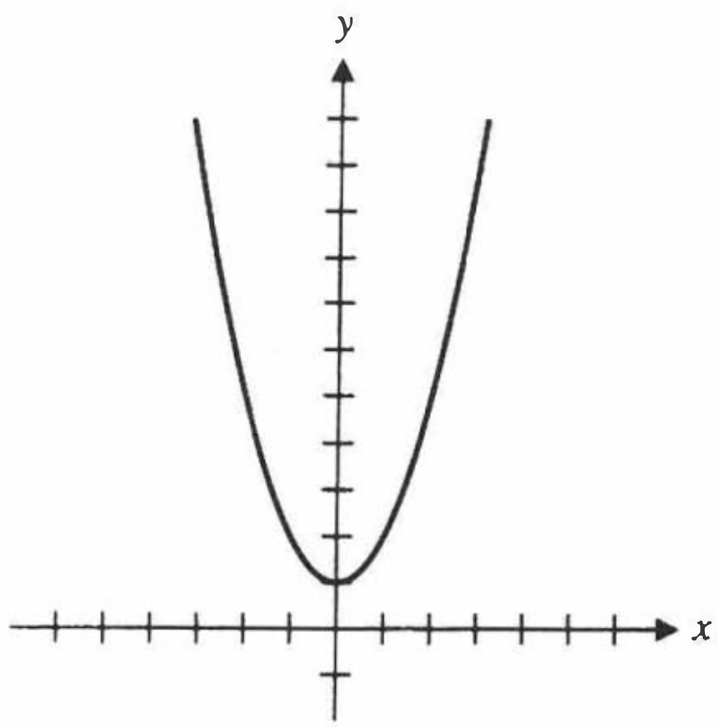
3. En la figura $EB \parallel OC$, $ED \parallel AC$ y $BD \parallel OA$, de manera que $\Delta\, OAC$ es similar al $\Delta\, BDE$.



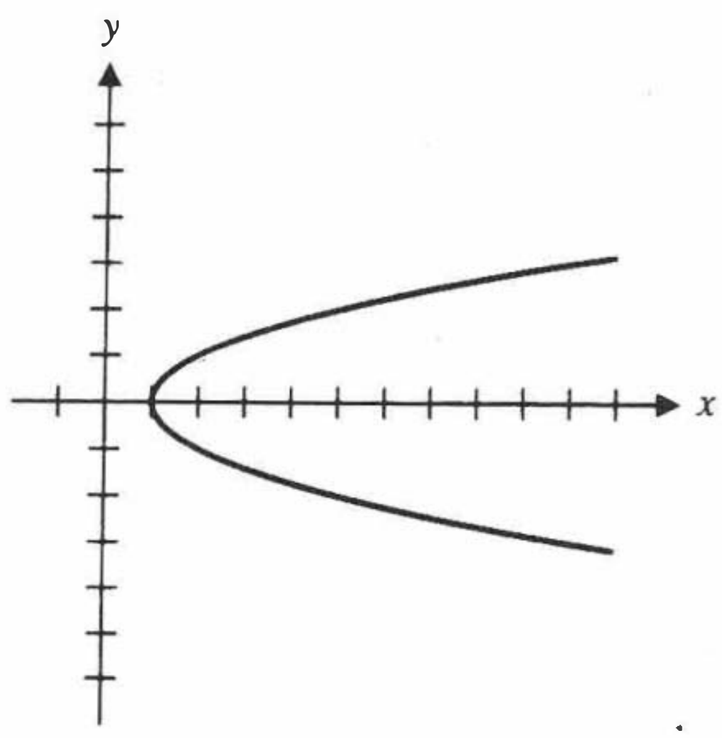
4. a) Sí es función



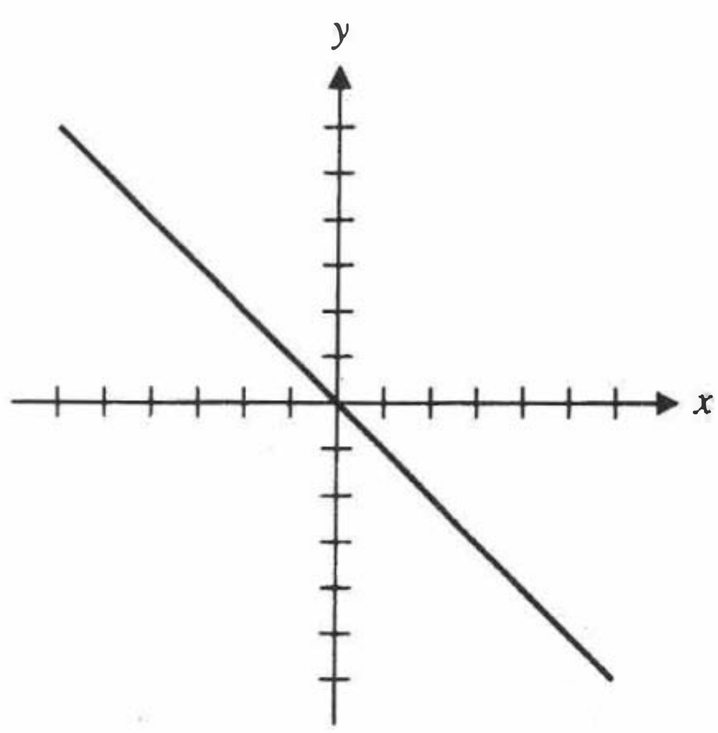
b) Sí es función



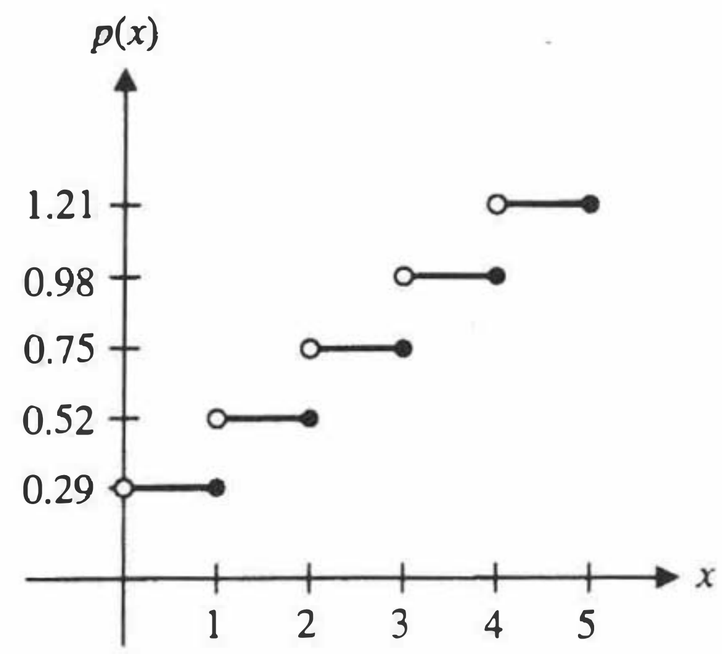
c) No es función



d) Sí es función



5. Sea x = peso de la carta, en onzas, y $p(x)$ = lo que cuesta enviar por correo x onzas, en las unidades de moneda en uso. Entonces $p(x) = 0.06 + 0.23k$, si $k - 1 < x \leq k$, para $k = 1, 2, 3, 4, 5$. El dominio es $(0, 5]$, la imagen es $\{0.29, 0.52, 0.75, 0.98, 1.21\}$.



6. $3x^2 + 2x + 3y^2 - 8y + 3 = 0$

7. a) $[1, \infty)$; b) $(-\infty, 1]$; c) $[1]$.

8. $\varnothing$

CAPÍTULO 2

Ejercicios, sección 2.1; páginas 67–69

2. $m = -1$, $a = 6$, $b = 6$, $y = -x + 6$

4. $m = -\frac{9}{4}$, $a = 4$, $b = 9$, $y = -\frac{9}{4}x + 9$

6. $m = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{10}{3}$, $b = \frac{5}{3}$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{3}$

8. $m = -\frac{3}{2}$, $a = \frac{14}{3}$, $b = 7$, $y = -\frac{3}{2}x + 7$

10. $m = 4$, $a = \frac{5}{8}$, $b = -\frac{5}{2}$, $y = 4x - \frac{5}{2}$

12. $m = -1$, $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{1}{5}$, $y = -x + \frac{1}{5}$

14. $m = 0.4589$, $a = 2.8183$, $b = -1.2933$, $y = 0.4589x - 1.2933$

16. $y = 2x - 3$

18. $y = 5x$

20. $y = \frac{3}{2}x - 4$

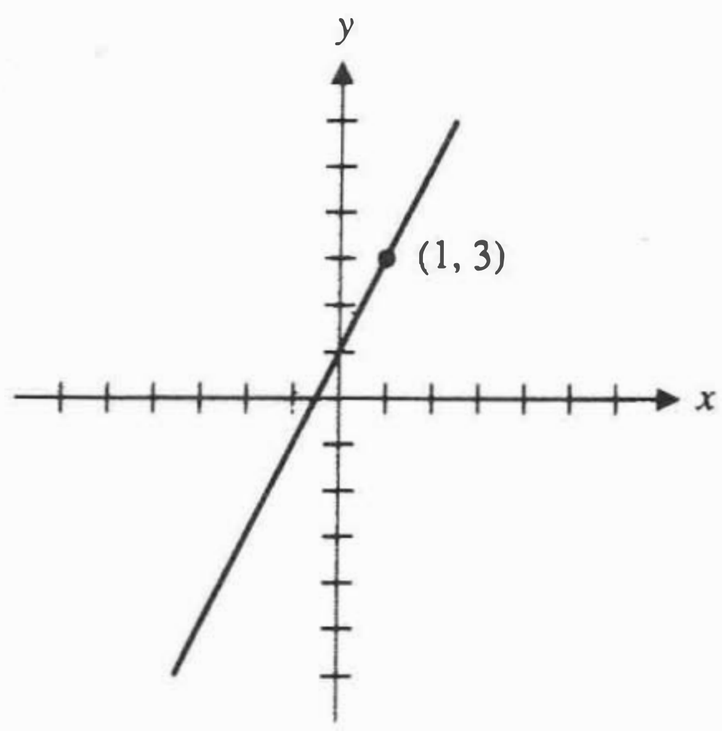
22. $y = \frac{4}{3}x + 3$

24. $y = -3x - 4$

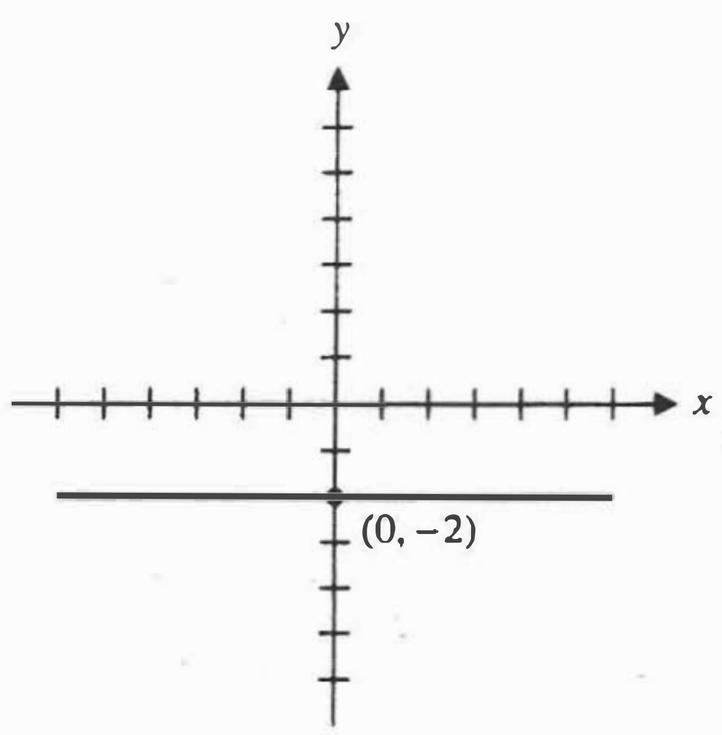
26. $y = -8x + 7$

28. $y = \frac{5}{3}x - 4$

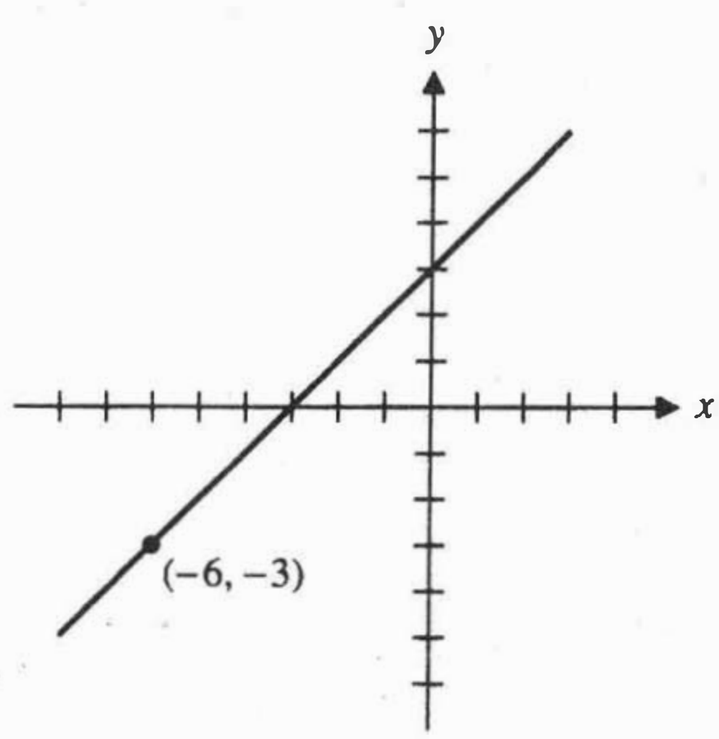
30. $2x - y = -1$



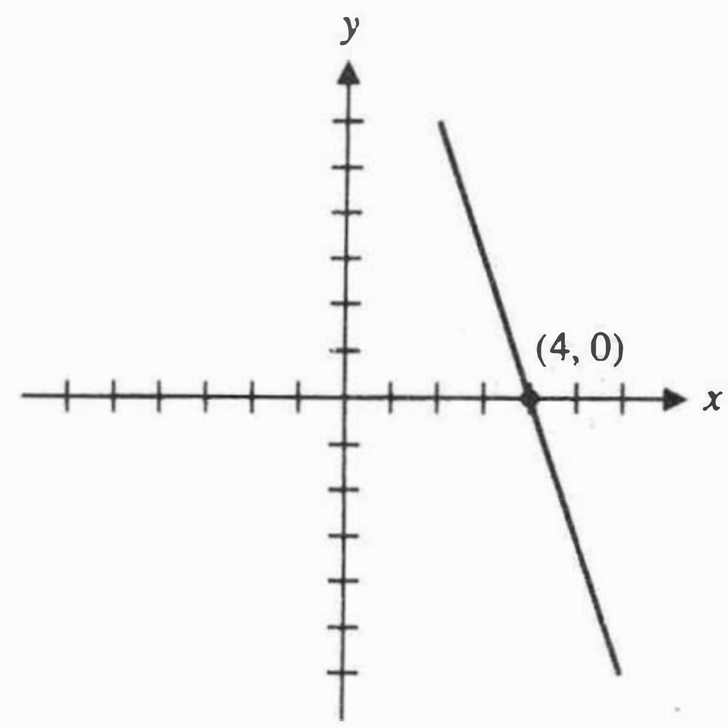
32. $y = -2$



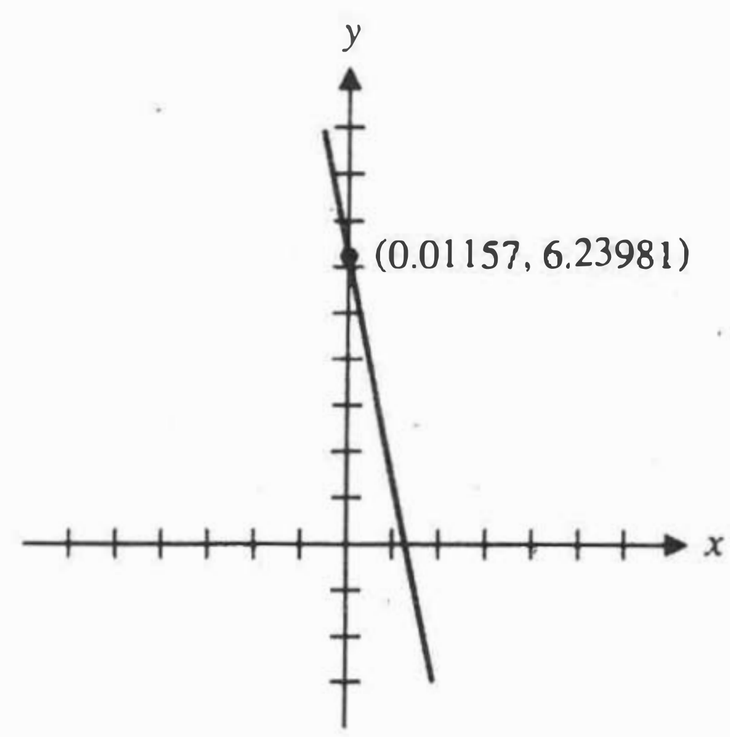
34. $x - y = -3$



36. $3x + y = 12$



38. $4.90032x + y = 6.29651$



40. $7x + 6y = 11$

42. $x + 2y = 2$

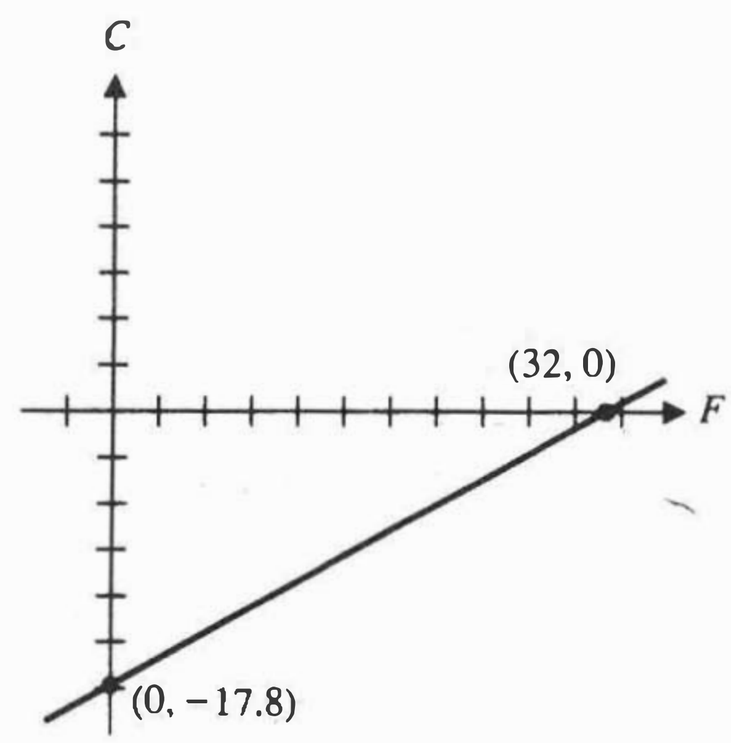
44. $3x + 4y = 0$

46. $x = -1$

48. $\frac{1}{3}x - y = 0$

50. $1.93759x + y = 18.023216$

52.



54. $-40°$

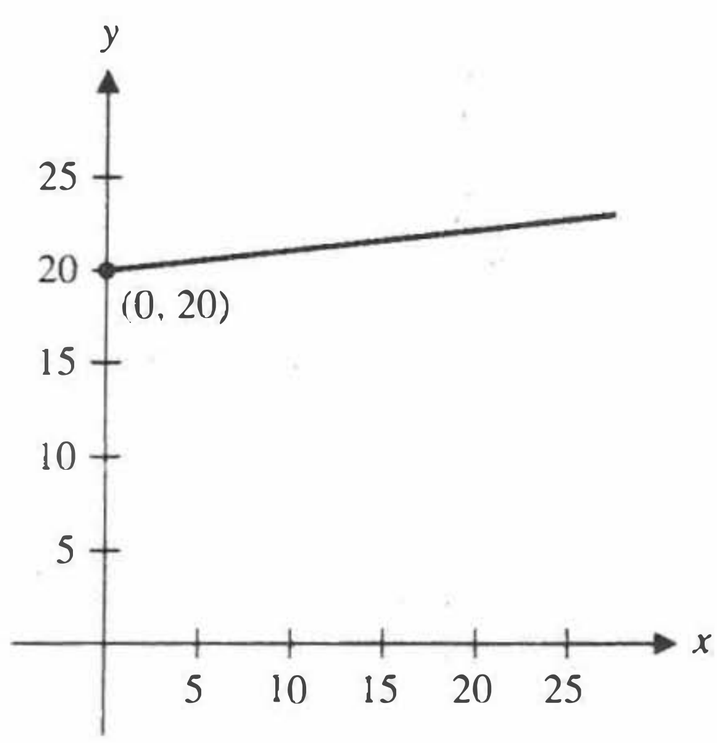
56. $T = 20 + 15x,\ 0 \le x \le 8;$
$T = 140 - 15(8 - x)$ if $0 \le x \le 8$.

58. \$1.40, \$3900

Ejercicios, sección 2.2; páginas 73–74

2. $4x + 5y = -13$
4. $2x - 5y = -6$
6. $3x + y = -1$
8. $3x + 4y = -6$
10. $2x + 3y = 6$
12. $4x - 3y = 12$
14. $10x + 9y = -6$
16. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-8} = 1$
18. $\dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{9} = 1$
20. $\dfrac{x}{(20/9)} + \dfrac{y}{(-5/9)} = 1$
22. $3x - 2y + 5 = 0,\ 2x + 3y - 14 = 0$
24. $8y + x + 13 = 0,\ 8x - y - 26 = 0$
26. $1492x + 1776y - 3552 = 0,$
$1776x - 1492y + 2984 = 0$
28. $x + 3y - 8 = 0$
30. $2x + 5y - 9 = 0$

34. Si y = costo de alquiler y x = kilómetros recorridos, entonces $y = 20 + 0.11x$

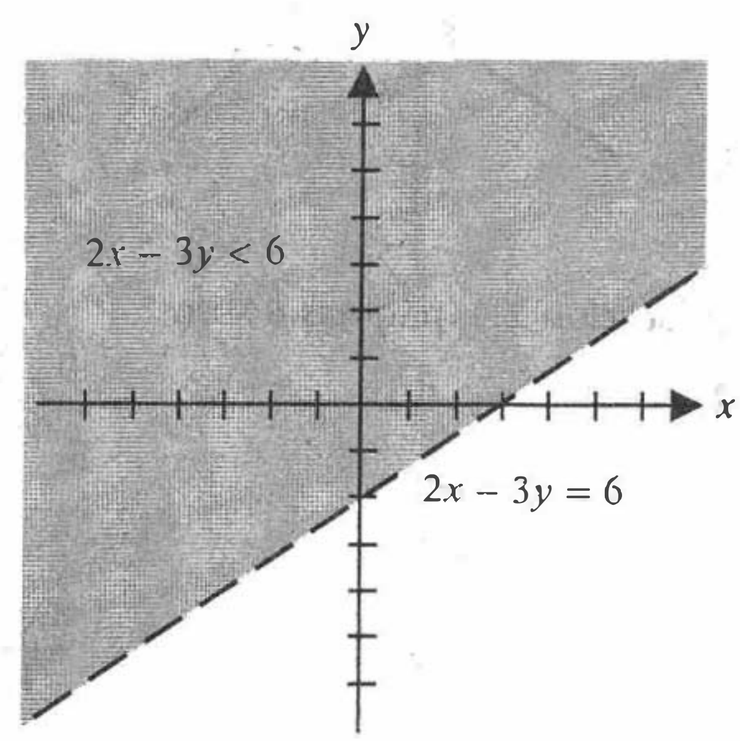


Ejercicios, sección 2.3; páginas 77–78

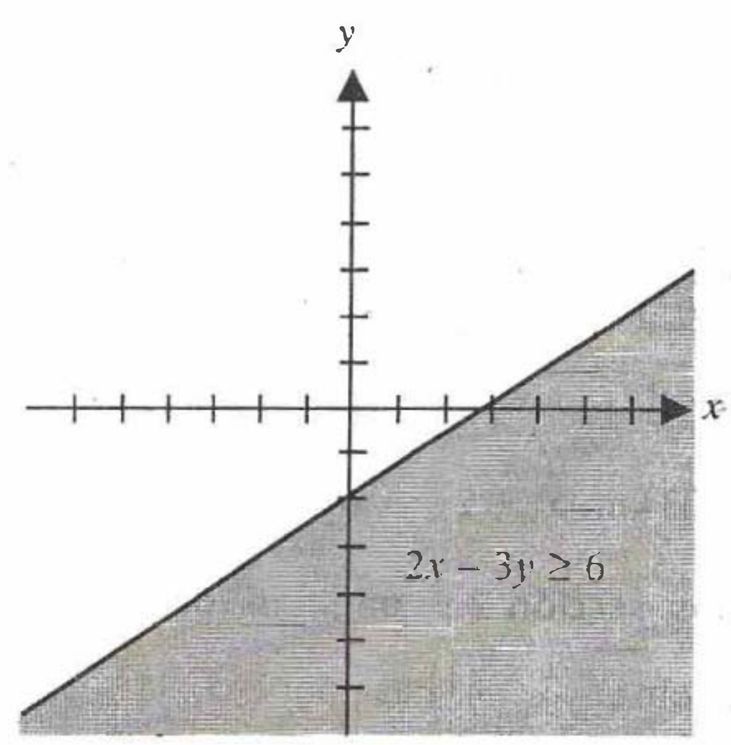
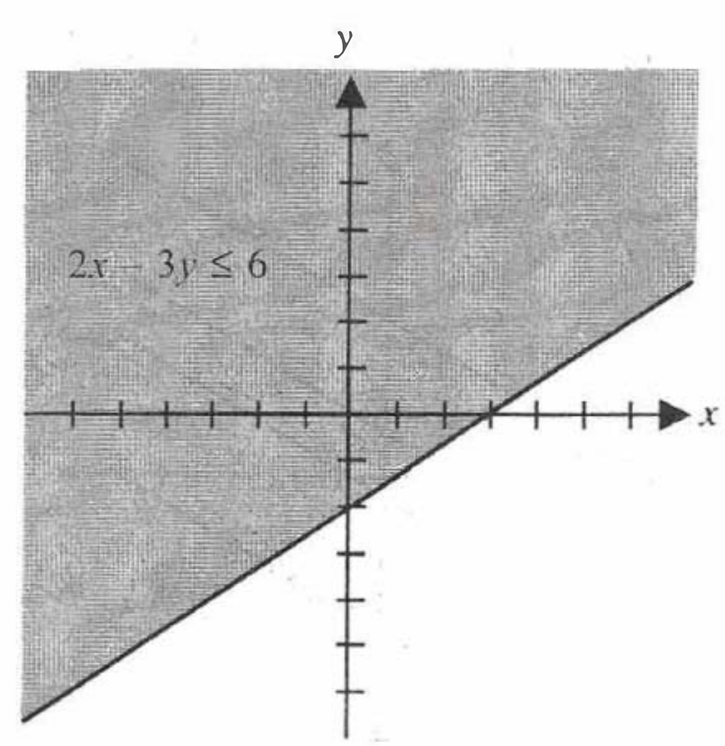
2. $(3, 0)$
4. $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$
6. $\left(1, -\frac{5}{3}\right)$
8. $\left(\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}\right)$
10. $(10, 0)$
12. $(-16, 10), (2, -8), \left(-\frac{8}{5}, \frac{14}{5}\right)$

14. El equilibrio de mercado es producir 12 unidades a \$44 cada una.

16. a)



b)



c)